Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2016/2017
Liste 4 de TD d'Algèbre MI
Chapitre 2: Partie2: **Images directe et reciproque d'une partie**

Exercice1. P*ar la fonction* $f : x \to x^2$ *définie sur* $\mathbb{R}$, déterminer:
$f\ ([0,1[)$, $f(\mathbb{R})$, $f(]-1,2[)$, $f^{-1}([1,2[)$, $f^{-1}([-1,1])$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{N})$.

Solution: Tracer la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ dans un repère orthonormé.
$f\ ([0,1[)$ est l'image directe de l'intervalle $[0,1[$ qui est une partie de l'axe des abscisses. Les points qui se situent sur la courbe et qui ont pour abscisses les valeurs dans $[0,1[$ ont pour ordonnées les valeurs de $[0,1[$. Donc $f\ ([0,1[) = [0,1[$.
$f(\mathbb{R})$ est l'image directe de $\mathbb{R}$ qui est tout l'axe des abscisses. Les points qui se situent sur la courbe et qui ont pour abscisses les valeurs dans $\mathbb{R}$ ont pour ordonnées les valeurs de $[0,+\infty[$. Donc $f\ (\mathbb{R}) = [0,+\infty[$.
$f(]-1,2[)$ est l'image directe de $]-1,2[$ qui est est une partie de l'axe des abscisses. Les points qui se situent sur la courbe et qui ont pour abscisses les valeurs dans $]-1,2[$ ont pour ordonnées les valeurs de $[0,4[$. Donc $f\ (]-1,2[) = [0,4[$.
$f^{-1}([1,2[)$ est l'image réciproque de l'intervalle $[1,2[$ qui est une partie de l'axe des ordonnées. Les points qui se situent sur la courbe et qui ont pour ordonnées les valeurs dans $[1,2[$ ont pour abscisses les valeurs dans $]-\sqrt{2},-1] \cup [1,\sqrt{2}[$. Donc $f^{-1}([1,2[) =]-\sqrt{2},-1] \cup [1,\sqrt{2}[$.
$f^{-1}([-1,1])$ est l'image réciproque de l'intervalle $[-1,1]$ qui est une partie de l'axe des ordonnées. Les points qui se situent sur la courbe et qui ont pour ordonnées les valeurs dans $[-1,1]$ ont pour abscisses les valeurs dans $[-1,1]$. Donc $f^{-1}([-1,1]) = [-1,1]$.
$f^{-1}(\{3\})$ est l'image réciproque du singleton $\{3\}$ qui est une partie de l'axe des ordonnées. Les points qui se situent sur la courbe et qui ont pour ordonnée la valeur 3 ont pour abscisses $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. Donc $f\ ^{-1}(\{3\}) = \left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$.
$f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{N})$ est l'image réciproque de l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ qui est une partie de l'axe des ordonnées. Les points qui se situent sur la courbe et qui ont pour ordonnées les valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ (pour $f(x) = x^2$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N} = \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N} = \bigcup_{k=0}^{+\infty}]k,k+1[$) ont pour abscisses les valeurs dans $(\bigcup_{k=0}^{+\infty}]-\sqrt{k+1},-\sqrt{k}[) \bigcup (\bigcup_{k=0}^{+\infty}]\sqrt{k},\sqrt{k+1}[)$.

Exercice2. Soit $f : E \to F$ une application. *Montrer:*
a) $\forall A, B$ *des parties de* E $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ *et* $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
b) $\forall A, B$ *des parties de* E $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ *et* $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Solution: f est une application. Donc à tout élément x de E correspond une seule image dans F.

a) Montrons que $\forall A,\ B$ *des parties de* $E,\ \ f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.
Dans ce cas montrons que $\forall A,\ B$ *des parties de* $E,\ \ f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$, puis montrons que $\forall A,\ B$ *des parties de* $E\ \ f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$. Commençons par monter que $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$. Soit $y\in f(A\cup B)$. Il existe donc $x\in A\cup B$ tel que $y=f(x)$. Puisque $x\in A\cup B$ alors $x\in A$ *ou* $x\in B$. Si $x\in A$ alors $y\in f(A)$ donc $y\in f(A)\cup f(B)$. Et si $x\in B$ alors $y\in f(B)$ donc $y\in f(B)\cup f(A)$. Maintenant montrons que $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$. Soit $y\in f(A)\cup f(B)$. Donc $y\in f(A)$ *ou* $y\in f(B)$. Si $y\in f(A)$ alors il existe $x\in A$ tel que $y=f(x)$. Ce x qui est dans A, il est aussi dans $A\cup B$ donc $y\in f(A\cup B)$. Maintenant si $y\in f(B)$ alors il existe $x\in B$ tel que $y=f(x)$. Ce x qui est dans B, il est aussi dans $A\cup B$ donc $y\in f(A\cup B)$.
Montrons maintenant que $\forall A,\ B$ *des parties de* $E,\ f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$. Soit $y\in f(A\cap B)$. Il existe donc $x\in A\cap B$ tel que $y=f(x)$. Ce x qui est dans $A\cap B$ il est à la fois dans A et aussi dans B. $x\in A$ veut dire que $y=f(x)$ est dans $f(A)$, et x dans B veut dire que y est dans $f(B)$ donc y est clairement dans $f(A)\cap f(B)$.
b) Montrons que $\forall A,\ B$ *des parties de* $F,\ \ f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$ *et* $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.
Soit x un élément de $f^{-1}(A\cup B)$. Ceci est équivalent à $f(x)\in A\cup B$ donc $f(x)\in A$ *ou* $f(x)\in B$, donc équivaut à dire que $x\in f^{-1}(A)$ *ou* $x\in f^{-1}(B)$ *c.à.d.* $x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.
Montrons que $\forall A,\ B$ *des parties de* $F,\ f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$. Soit x un élément de $f^{-1}(A\cap B)$. Ceci est équivalent à $f(x)\in A\cap B$ donc $f(x)\in A$ *et* $f(x)\in B$, donc équivaut à dire que $x\in f^{-1}(A)$ *et* $x\in f^{-1}(B)$ *c.à.d.* $x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.

Exercice3. Soit $f:E\to F$ une application. Etablir:
$\forall A\in P(E);\ A\subset f^{-1}(f(A))$ *et* $\ \forall B\in P(F);\ f(f^{-1}(B))\subset B$.
$P(E)$ *et* $P(F)$ *sont les ensembles de parties de* E *et de* F *respectivement.*

<u>Solution:</u> **<u>Rappel:</u>** $P(E)$ est l'ensemble de tous les sous ensembles de E. $\varnothing$ et E font partie de $P(E)$. Un élément de $P(E)$ est un sous ensemble de E ou une partie de E.
Etablissons que $\forall A\in P(E);\ A\subset f^{-1}(f(A))$. Soit $x\in A$. Le fait que f est une apllication alors $f(x)$ existe et $f(x)\in f(A)$. Donc $x\in f^{-1}(f(A))$.
Etablissons que $\forall B\in P(F);\ f(f^{-1}(B))\subset B$. Soit $y\in f(f^{-1}(B))$. Il existe donc x dans $f^{-1}(B)$ tel que $y=f(x)$. x étant dans $f^{-1}(B)$, ceci nous donne $f(x)\in B$. Or $y=f(x)$ d'ou $y\in B$.