Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2016/2017
Liste 2 de TD d'Algèbre MI
Chapitre 1: Partie2: **Logique et Raisonnement**

Exercice1. Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer. n est un entier naturel, x et y sont des nombres réels.
1- n premier $\Rightarrow (n = 2$ *ou* n est impair),
2- $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ *et* $y \neq 0$,
3- $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Solution: 1) la contraposée est: $(n \neq 2$ *et* n pair$) \Rightarrow n$ non premier. Preuve: $(n \neq 2$ *et* n pair$) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ tel que $n = 2k \Rightarrow n$ non premier, car n sera divisible par 2 autre que 1 et n seulement.
2) la contaposée est: $x = 0$ *ou* $y = 0 \Rightarrow xy = 0$. C'est évident.
3) la contraposée est: $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$. Il suffit de développer $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$.

Exercice2. Soit $n > 2$ un entier. Montrer par l'absurde que, si n n'est pas premier alors il admet un diviseur premier p qui est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$. A l'aide de ce critère, déterminer si les nombres $89, 167$ et 191 sont premiers.

Solution: On a n un entier tel que $n > 2$.
Le raisonnement par absurde: **On suppose** que n est non premier **ET** que n n'admet pas de diviseur premier $p \leq \sqrt{n}$.
Puisque n est non premier alors on peut trouver deux entiers a et b qui sont différents de 1 et de n chqcun et tel que $n = ab$. On peut fixer a et b comme suit: $2 \leq a \leq b \leq n-1$. Dans ce cas on a $a^2 \leq ab$ donc $a^2 \leq n$. Ce qui donne $a \leq \sqrt{n}$. Maintenant a peut-être premier, d'ou contradiction avec le fait que n n'admet pas de diviseur premier $p \leq \sqrt{n}$. Et si a est non premier alors on peut toujours écrire a sous forme de $a = pm$ où p est premier. Donc on aura $p^2m^2 \leq n$, d'où $p \leq \sqrt{n}$ puisque $p \leq \frac{\sqrt{n}}{m}$. D'ou la contradiction.
Appliquons ce critère pour savoir si les nombres $89, 167$ et 191 sont premiers.
$\sqrt{89} = 9.433...$ Les nombres premiers p tel que $p \leq \sqrt{89}$ sont $2, 3, 5$ et 7. Aucun de ces nombres ne divise 89 donc 89 est premier.
$\sqrt{167} = 12.922...$Les nombres premiers p tel que $p \leq \sqrt{167}$ sont $2, 3, 5, 7$ et 11. Aucun de ces nombres ne divise 167 donc 167 est premier.
$\sqrt{191} = 13.820...$Les nombres premiers p tel que $p \leq \sqrt{191}$ sont $2, 3, 5, 7, 11$ et 13. Aucun de ces nombres ne divise 191 donc 191 est premier.

Exercice3. Démontrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1,2,3\}$, $n^2 \leq 2^n$.

Solution: Pour $n = 4$ ona $4^2 \leq 2^4$ soit $16 \leq 16$ ce qui est vrai. Fixons maintenant n dans $\mathbb{N} - \{0,1,2,3\}$ et supposons que $n^2 \leq 2^n$. Montrons alors que pour ce n fixé on a $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$.
$(n+1)^2 = n^2+2n+1 \leq 2^n+2n+1$. Montrons maintenant que $2n+1 \leq 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}-\{0,1,2,3\}$. Pour $n = 4$ on a $9 \leq 2^4$ soit $9 \leq 16$ ce qui est vrai. Fixons n dans $\mathbb{N} - \{0,1,2,3\}$ et supposons que $2n+1 \leq 2^n$ et montrons que pour ce n fixé on a $2(n+1)+1 \leq 2^{n+1}$. On a bien $2(n+1)+1 = 2n+1+2 \leq 2^n+2 \leq 2^n+2^n$. Donc $(n+1)^2 \leq 2^n + 2^n$ soit $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$.

Exercice4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété: P_n : 3 divise $4^n - 1$. Montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution: Pour $n = 0$ on a bien 3 divise $4^0 - 1 = 0$. Fixons n dans $\mathbb{N}$ et supposons que 3 divise $4^n - 1$. Montrons alors que 3 divise $4^{n+1} - 1$. Or $4^{n+1} - 1 = 4^n 4 - 1 = (4^n - 1)4 + (4-1)$. On voit bien que 3 divise $4^n - 1$ et divise $4 - 1$ donc 3 divise $(4^n - 1)4 + (4-1)$, soit 3 divise $4^{n+1} - 1$.

Exercice5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solution: Par récurrence.

.