Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2016/2017
Liste 1 de TD d'Algèbre MI
Chapitre 1: Partie1: **Elèments de Logique**

Exercice1: *Montrer que les assertions suivantes sont des tautologies (i.e. toujours vraies):*
P *ou* $(P \Rightarrow Q)$, $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$, $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$. *($P$ et Q sont deux assertions).*

Solution: *On discute selon les valeurs de vérité de chacune des assertions P et Q :*
La première assertion est: P *ou* $(P \Rightarrow Q)$.
Si P est fausse alors P ou $(P \Rightarrow Q)$ ne sera vraie que si $P \Rightarrow Q$ est vraie. Or P est fausse donc $P \Rightarrow Q$ est vraie quelque soit la valeur de vérité de Q.
Si P est vraie alors automatiquement P ou $(P \Rightarrow Q)$ est vraie quelque soit la valeur de vérité de Q.
Donc P ou $(P \Rightarrow Q)$ est vraie pour toute valeur de vérité de P et de Q.
On peut aussi dresser la table de vérité correspondante à l'assertion P ou $(P \Rightarrow Q)$.
La seconde assertion $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$.
Si P est fausse alors $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est vraie quelque soit la valeur de Q.
Si P est vraie alors $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ n'est vraie que si $Q \Rightarrow P$ est vraie. Or si Q est fausse alors $Q \Rightarrow P$ est vraie. Et si Q est vraie alors automatiquement $Q \Rightarrow P$ est vraie puisque P l'est.
Donc $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est vraie pour toute valeur de vérité de P et de Q.
La troisième assertion $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$.
Si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est vraie et $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$ est fausse, donc $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ est vraie.
Si P est vraie alors :
Si Q est vraie alors $P \Rightarrow Q$ est vraie et par suite $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$ est vraie et donc $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ est vraie.
Si Q est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est fausse et par suite $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$ est vraie et donc $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ est vraie.
Donc $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ est vraie pour toute valeur de vérité de P et de Q.
On peut bien sûre faire autrement et dresser les tables de vérité correspondantes aux trois assertions.

Exercice2: *Simplifier l'expression:* $(\overline{P}$ et $Q)$ *ou* $(\overline{P}$ et $\overline{Q})$ *ou* $(P$ et $Q)$. *L'assertion* $\overline{A}$ *est la négation de l'assertion* A.

Solution: *On va discuter selon les valeurs de vérité de* P *et de* Q.*(Dresser une table de vérité)*

Si P et si Q sont vraies toutes les deux alors:

$\overline{P}$ *et* Q *est fausse,* $\overline{P}$ *et* $\overline{Q}$ *est fausse et* P *et* Q *est vraie, d'ou* $(\overline{P}$ *et* $Q)$ *ou* $(\overline{P}$ *et* $\overline{Q})$ *ou* $(P$ *et* $Q)$ **vraie.**

Si P est vraie et si Q est fausse alors:

$\overline{P}$ *et* Q *est fausse,* $\overline{P}$ *et* $\overline{Q}$ *est fausse et* P *et* Q *est fausse, d'ou* $(\overline{P}$ *et* $Q)$ *ou* $(\overline{P}$ *et* $\overline{Q})$ *ou* $(P$ *et* $Q)$ **fausse.**

Si P est fausse et si Q est vraie alors:

$\overline{P}$ *et* Q *est vraie,* $\overline{P}$ *et* $\overline{Q}$ *est fausse et* P *et* Q *est fausse, d'ou* $(\overline{P}$ *et* $Q)$ *ou* $(\overline{P}$ *et* $\overline{Q})$ *ou* $(P$ *et* $Q)$ **vraie.**

Si P et si Q sont fausses toutes les deux alors:

$\overline{P}$ *et* Q *est fausse,* $\overline{P}$ *et* $\overline{Q}$ *est vraie et* P *et* Q *est fausse, d'ou* $(\overline{P}$ *et* $Q)$ *ou* $(\overline{P}$ *et* $\overline{Q})$ *ou* $(P$ *et* $Q)$ **vraie**.

On remarque bien que les valeurs de vérité obtenues **dans cet ordre***, qui est celui de l'ordre habituel de la table de vérité, sont bien les mêmes de l'assertion* $P \Rightarrow Q$.

Exercice3: *Soient* P, Q *et* R *trois assertions. Montrer les équivalences qui suivent:*

$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \Rightarrow R)$, $((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R))$.

Solution: *Utilisez tout simplement la table de vérité. On a* 3 *assertions* P, Q, *et* R. *A chaque assertion correspond* 2 *valeurs de vérité, vraie et fausse, donc la table de vérité contient* $2^3 = 8$ *lignes.*

Exercice4: *Soient* n *et* m *deux entiers naturels.*

1. *Donner un équivalent de* $(n < m) \Rightarrow (n = m)$.
2. *Donner la négation de* $(n \leq m) \Rightarrow (n > m)$.

Solution: *Il y a deux équivalents (parmi d'autres) simples pour une implication:* $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

Donc $[(n < m) \Rightarrow (n = m)] \Leftrightarrow [(n \geq m) ou (n = m)]$ *ou* $[(n < m) \Rightarrow (n = m)] \Leftrightarrow [(n \neq m) \Rightarrow (n \geq m)]$.

Pour la négation: $\left[\overline{(n \leq m) \Rightarrow (n > m)}\right] \Leftrightarrow [(n \leq m) \text{ et } (n \leq m)] \Leftrightarrow (n \leq m)$.

Exercice5: *Dire si c'est vrai ou faux:* $(x \in \mathbb{R})$
1. $x > 5 \Rightarrow x > 3$.
2. $x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$.
3. $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$.
4. $x = 0 \Rightarrow x \leq 0$.
5. $z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| = 1$.

Solution: **1.** *Vrai, si* $x > 5$ *alors certainement* $x > 3$,
2. Vrai, $x^3 = -1$ *a une seule solution dans* $\mathbb{R}$, $x = -1$ *donc* $x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$ *et si* $x = -1$ *alors* $x^3 = -1$ *d'ou équivalence.*
3. Faux, $x^2 = 9$ *a deux solutions* $x = -3$ *et* $x = 3$ *donc* $x^2 = 9 \Rightarrow (x = 3$ *ou* $x = -3)$, *mais* $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ *est vraie.*
4. Vrai, $x = 0 \Rightarrow (x = 0$ *ou* $x < 0)$
5. Faux, si $z \in \mathbb{C}$ *alors* z *est quelqconque dans* $\mathbb{C}$ *et par suite* $|z|$ *peut-être différent de* 1, *exemple: prendre* $z = 2i$.

Exercice6: *Ecrire avec les quantificateurs les propositions suivantes:*

1. *f est la fonction nulle (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).*
2. *Le dénominateur D de f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.*
3. *f est l'identité de $\mathbb{R}$.* (C'est à dire la fonction qui, à chaque réel, associe lui même).
4. *Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$.*
5. *L'équation $\sin(x) = x$ a une et une solution dans $\mathbb{R}$.*
6. *Tout entier naturel est pair ou impair.*
7. *Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.*

Solution: 1. $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = 0$.
2. $\exists x \in \mathbb{R};\ D(x) = 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = id(x) = x$.
4. $\exists x \in D_f$ (D_f *est l'ensemble de définition de* f); $f(x) = x$.
5. $\exists! x \in \mathbb{R};\ \sin(x) = x$.
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{Z};\ n = 2k$ *ou* $n = 2k + 1$.
7. $(\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{Z};\ n = 2k)$ *ou* $(\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{Z};\ n = 2k + 1)$.

Exercice7: *Montrer que;* $\exists x \in \mathbb{R}\ /\ \sin(x) = x$.

Solution: si $x = 0$ alors $\sin(x) = \sin(0) = x = 0$.

Exercice8: *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On considère les assertions suivantes:*

$P : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$, $Q : \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ *et* $R :$ $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0)$.

Parmi les implications suivantes lesquelles sont exactes:

1. $P \Rightarrow Q$
2. $Q \Rightarrow P$
3. $Q \Rightarrow R$
4. $\overline{R} \Rightarrow Q$
5. $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Solution: 1. V*rai: si pour tout* x *réel ona* $f(x) = 0$, *alors certainement il existe au moins* x *réel tel que* $f(x) = 0$.
2. Faux: s'il existe au moins x *réel tel que* $f(x) = 0$ *alors on ne peut pas confirmer qu'on a pour tout* x *réel,* $f(x) = 0$.
3. Faux: pensons à la contarposée c'est à dire: $\overline{R} \Rightarrow \overline{Q}$, *avec* $\overline{R}$: $(\exists x \in \mathbb{R}; f(x) \leq 0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0)$ *et* $\overline{Q} : \forall x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0$.
On part de $\overline{R}$ *vraie, c'est à dire* $\exists x \in \mathbb{R};\ f(x) \leq 0$ *vraie et* $\exists x \in \mathbb{R};\ f(x) \geq 0$ *vraie. Ces deux assertions sont vraies donc l'intersection nous donne* $\exists x \in \mathbb{R}; f(x) = 0$. *De ceci on ne peut pas déduire* $\overline{Q}$ *c'est à dire* $\forall \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0$.
4. Vrai: Les deux assertions qui constituent $\overline{R}$ *sont vraies donc l'intersection nous donne* $\exists x \in \mathbb{R};\ f(x) = 0$, *d'ou* Q.
5. Vrai: c'est la contraposée de 1. qui est vraie.

Exercice9: *Montrer que* $(\forall \epsilon \geq 0,\ |x| \leq \epsilon) \Rightarrow x = 0$.
Solution: $\forall \epsilon \geq 0,\ |x| \leq \epsilon$: *Cette assertion se lit comme suit: le réel* x *en valeur absolue est* $\leq$ *à toute valeur de* ϵ *qui soit* ≥ 0. *Donc en particulier cette valeur absolue de* x *sera* $\leq$ *à zéro. D'ou* $|x| \leq 0$. *Ceci nous donne* $x = 0$.

Remarque: soit la question suivante (à comparer avec l'exercice 9): *Montrer que* $(\forall \epsilon > 0,\ |x| \leq \epsilon) \Rightarrow x = 0$. Cette fois-ci l'assertion se lit comme suit: *le réel* x *en valeur absolue est* $\leq$ *à toute valeur de* ϵ *qui soit* > 0 (STRICTEMENT POSITIVE). *Donc on ne peut plus donner la valeur zéro à* ϵ comme dans l'exercice 9. Comment faire ? Pour montrer cette implication on utilise un raisonnement vu en cours: raisonnement par contraposition. Montrons donc que: $x \neq 0 \Rightarrow (\exists\ \epsilon > 0,\ |x| > \epsilon)$. Cette assertion se lit: Pour un réel $x \neq 0$, cherchons au moins une valeur de ϵ positive (qui dépend certainement de x) tel que: $|x| > \epsilon$. Prenons donc, par exemple $\epsilon = \dfrac{|x|}{2}$.