Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math
1ière Année LMD-MI
Durée : 01 h 30mn

Année Universitaire 2016/2017
Lundi 03/04/2017

Epreuve du rattrapage de mécanique

<u>Exercice 1</u> : (6pts)

La troisième loi de KEPLER relie la période **T** et la le demi-grand axe **a** de l'orbite d'une planète autour du soleil par : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$

Avec **G** la constante de la gravitation universelle et $\mathbf{M_s}$ la masse du soleil.

On donne : $G = (6.668 \pm 0.005).10^{-11}$SI

Pour la terre : $T = (365,25636567 \pm 0.00000001)$jours et $a=(1.4960 \pm 0.0003).10^{-11}$m

1- Déterminer la dimension et l'unité de G.
2- Déterminer la masse du soleil M_s et l'incertitude absolue ΔM_s sur cette masse.

<u>Exercice 2</u>: (8pts)

Soit le repère R(Oxyz) et le point O' se déplace sur **l'axe (Ox)** avec **une accélération constante γ ;** et une vitesse **initiale positive $\mathbf{V_0}$**. On lie à O' le repère (O'XYZ) qui tourne autour de **(Oz)** avec une vitesse angulaire **ω constante**. Les coordonnées d'un mobile M dans **le repère mobile** sont **$X'=t^2+2$ et $Y'=2t$.**

A l'instant t=0, l'axe (O'X) est confondu avec (Ox).

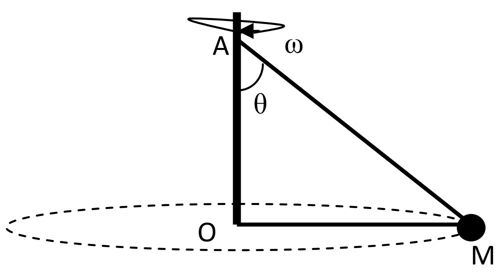
Calculer dans **le repère mobile** (O'XYZ) **:**

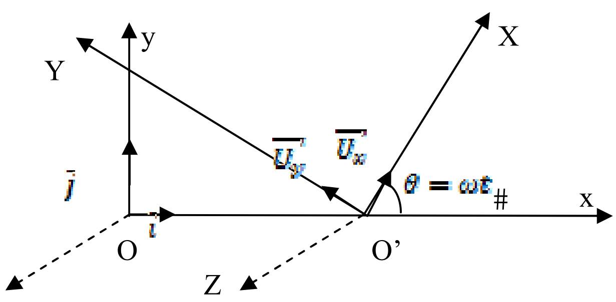
1- La vitesse relative $\vec{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\vec{v_e}$, en déduire la vitesse absolue $\vec{v_a}$.
2- L'accélération relative $\vec{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\vec{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\vec{a_c}$, en déduire l'accélération absolue $\vec{a_a}$.

<u>Exercice 3</u>: (6pts)

Une balle de masse m est attachée par deux fils (Am et Om) à un poteau vertical. Tout le système tourne avec une vitesse angulaire ω constante autour de l'axe du poteau.
(on connait g l'accélération de la pesanteur, θ et $L = |\overline{OM}|$)

1. En supposant ω suffisamment grande pour maintenir les deux fils tendus, trouver la force (tension du fil) que chaque fil exerce sur la boule.
2. Quelle est la vitesse angulaire minimum ω_{min} pour laquelle le fil du bas reste tendu.





Corrigé du rattrapage de mécanique
(2016/2017)

<u>Exercice 1</u> : (6pts)

1) on à $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \Rightarrow G = \frac{4\pi^2.a^3}{T^2.M_S}$ **(0.5pts)**

$\Rightarrow [G] = \frac{[4\pi^2].[a^3]}{[T^2].[M_S]} = \frac{L^3}{T^2M} = L^3T^{-2}M^{-1}$ **(01pts)**

L'unité de G est ($m^3.s^{-2}.kg^{-1}$) **(0.5pts)**

2) la masse du soleil :

$M_s = \frac{4\pi^2.a^3}{T^2.G}$ **(0.5pts)**

$\Rightarrow \ln(M_s) = \ln(4\pi^2) + 3\ln(a) - 2\ln T - \ln(G)$ **(0.5pts)**

$\Rightarrow \frac{dM_S}{M_S} = 3\frac{da}{a} - 2\frac{dT}{T} - \frac{dG}{G}$ **(0.5pts)**

$\Rightarrow \frac{\Delta M_s}{M_S} = 3\frac{\Delta a}{a} + 2\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta G}{G}$ **(0.5pts)**

$\Rightarrow \frac{\Delta M_s}{M_S} = 3.\frac{2.10^{-4}}{1.4960} + 2.\frac{10^{-8}}{365,25636567} + \frac{5.10^{-3}}{6.668} = 1.35.10^{-3}$ **(0.5pts)**

$M_s = \frac{4\pi^2.a^3}{T^2.G} = 1.990.10^{30}kg$ **(0.5pts)**

$\rightarrow \Delta M_s = 2.6865.10^{27}kg$ soit $\Delta M_s = 0.003.10^{30}kg$ **(0.5pts)**

D'où $\Delta M_s = (1.990 \pm 0.003).10^{30}kg$ **(0.5pts)**

<u>Exercice 2</u>: (8pts)

1- **Les vitesses : (04pts)**

$\overrightarrow{v_r} = \frac{\overrightarrow{d_2 O'M}}{dt}$ avec $\overrightarrow{O'M} = (t^2 + 2)\overrightarrow{u_x} + 2t\overrightarrow{u_y}$ **(0.5pts)** et $\overrightarrow{OO'} = \left(\frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t\right)\vec{i}$ **(0.5pts)**

donc $\overrightarrow{v_r} = 2t\overrightarrow{u_x} + 2\overrightarrow{u_y}$ **(01pts)**

$\overrightarrow{v_e} = \frac{\overrightarrow{dOO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ **(0.25pts)** avec $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ **(0.25pts)**

donc $\frac{\overrightarrow{dOO'}}{dt} = (\gamma t + V_0)\,\vec{i} = (\gamma t + V_0)\left(\cos\omega t\,\overrightarrow{u_x} - \sin\omega t\,\overrightarrow{u_y}\right)$ **(0.25pts)**

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ (t^2+2) & 2t & 0 \end{vmatrix} = -2t\omega\overrightarrow{u_x} + (t^2+2)\omega\,\overrightarrow{u_y}$$ **(0.25pts)**

$$\overrightarrow{v_e} = [(\gamma t + V_0)\cos\omega t - 2t\omega\,]\overrightarrow{u_x} + [-(\gamma t + V_0)\sin\omega t + t^2\,\omega + 2\omega]\overrightarrow{u_y}$$ **(0.5pts)**

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$$

$$\overrightarrow{v_a} = [(\gamma t + V_0)\cos\omega t - 2t\omega + 2t\,]\overrightarrow{u_x} + [-(\gamma t + V_0)\sin\omega t + t^2\,\omega + 2\omega + 2]\overrightarrow{u_y}$$ **(0.5pts)**

2-Les accélérations : (04pts)

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} = 2\overrightarrow{u_x}$$ **(01pts)**

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$ **(0.25pts)**

$$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \gamma\,\vec{i'} = \gamma(\cos\omega t\,\vec{u_x} - \sin\omega t\,\vec{u_y})$$ **(0.25pts)**

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ -2t\omega & (t^2+2)\omega & 0 \end{vmatrix} = -(t^2+2)\omega^2\,\overrightarrow{u_x} - 2t\omega^2\overrightarrow{u_y}$$ **(0.25pts)**

$$\overrightarrow{a_e} = (\gamma\cos\omega t - t^2\omega^2 - 2\omega^2)\,\overrightarrow{u_x} + (-\gamma\sin\omega t - 2t\omega^2)\,\overrightarrow{u_y}$$ **(0.25pts)**

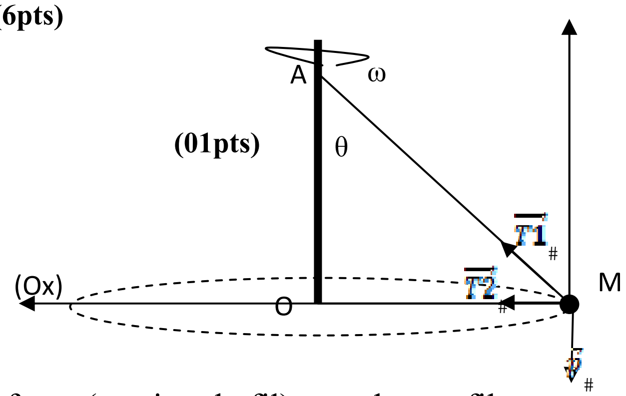
$$\overrightarrow{a_c} = \overrightarrow{2\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & 2\omega \\ 2t & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\omega\,\overrightarrow{u_x} + 4t\omega\,\overrightarrow{u_y}$$ **(01pts)**

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$$

$$\overrightarrow{a_a} = (\gamma\cos\omega t - t^2\omega^2 - 2\omega^2 - 4\omega + 2)\,\overrightarrow{u_x} + (-\gamma\sin\omega t - 2t\omega^2 + 4t\omega)\overrightarrow{u_y}$$ **(01pts)**

Exercice 3 : **(6pts)**

(01pts)



1-Trouvons la force (tension du fil) que chaque fil exerce sur la boule.

D'après le principe fondamental de la dynamique PFD

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = m\vec{a}$$ **(01pts)**

Le mouvement de la boule est circulaire donc l'accélération dans ce cas est l'accélération normale a_N qui est dirigé vers le centre du cercle (avec $a_N=v^2/R$)

On choisit le repère tel que (Ox) est suivant l'accélération normale et il est dirigé vers le centre du cercle et (Oy) est perpendiculaire à (Ox).

Sur (Ox) : $T_2+T_1 \sin\theta=m.a_N \Rightarrow T_2 + T_1 \sin\theta = m\frac{v^2}{R}$ **(0.5pts)**

Sur (Oy) : $p- T_1 \cos\theta=0 \Rightarrow m.g= T_1 \cos\theta$ **(0.5pts)**

Donc $T_1 = \frac{mg}{cos\theta}$ **(0. 5pts)**

$T_2 = m\frac{v^2}{R} - T_1 \sin\theta = m\frac{v^2}{R} - \frac{mg}{cos\theta}\sin\theta$

Donc $T_2 = m\frac{v^2}{R} - m\,g\,tg\,\theta$ (0.5pts)

2- La vitesse angulaire minimum ω_{min} pour laquelle le fil du bas reste tendu

Pour que le fil du bas reste tendu, il faut que $T_2 \geq 0$ **(0.5pts)**

$T_2 = m\frac{v^2}{R} - m\,g\,tg\,\theta \geq 0 \Rightarrow \frac{v^2}{R} \geq g\,tg\,\theta$ **(0.5pts)**

Avec $v=\omega R$ **(0.25pts)**$\Rightarrow \frac{\omega^2 R^2}{R} \geq g\,tg\,\theta$ avec R=OM=L

Donc $\omega^2 L \geq g\,tg\,\theta \Rightarrow \omega^2 \geq \frac{g\,tg\,\theta}{L}$ **(0.25pts)**

Et $\omega \geq \sqrt{\frac{g\,tg\,\theta}{L}}$ alors $\omega_{min} = \sqrt{\frac{g\,tg\,\theta}{L}}$ **(0.5pts)**