Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2016/2017.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Épreuve de Rattrapage.
Dimanche 02/04/2017 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1: (08pts) On considère la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} & , \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \geq 0 & \text{donné.} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle cette suite est constante. Notons cette valeur a.
2. Revenons au cas général de u_0. Montrer que si $u_0 > a$ alors la suite (u_n) est décroissante et que $u_n > a, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que si $u_0 < a$ alors la suite (u_n) est croissante et que $u_n < a, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que quelque soit le choix de $u_0 \geq 0$, la suite est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2: (07pts) On considère la fonction $f(x) = \text{Ln}x$ dans l'intervalle $I =]1, +\infty[$ et $\alpha > 0$ un paramètre réel fixé.

1. Montrer que $\forall x \in I$, on a $1 < x^{\alpha/2} < x^{\alpha}$.
2. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f dans l'intervalle $[x^{\alpha/2}, x^{\alpha}]$, montrer que
$$\frac{1}{x^{\alpha}} - \frac{1}{x^{3\alpha/2}} < \frac{\alpha}{2}.\frac{\text{Ln}x}{x^{\alpha}} < \frac{1}{x^{\alpha/2}} - \frac{1}{x^{\alpha}}$$
3. En déduire la valeur de $\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Ln}x}{x^{\alpha}}$.

Exercice 3: (05pts) On donne la fonction polynômiale $g(x) = x^5 - 5x + 1$.
En étudiant les variations de g, et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède exactement trois racines rélles.

$1^{ère}$ année M.I – Semestre 1 – (2016/2017)

Module : "Analyse 1" – Rattrapage – Corrigé.

Exercice 1 : (08 pts) $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{12+u_n}, & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \geq 0 \text{ donné.} \end{cases}$

1/ Si on suppose (u_n) constante, on a la condition nécessaire $u_1 = u_0$ or $u_1 = \sqrt{12+u_0} = u_0 \iff u_0^2 - u_0 - 12 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-12) = 49 = 7^2$ d'où $u_0 = \frac{1-7}{2} = -3$ ou $u_0 = \frac{1+7}{2} = 4$. Comme $u_0 \geq 0$ alors la seule valeur possible est $u_0 = 4$; $\boxed{a=4}$. Montrons qu'elle est suffisante par un raisonnement par récurrence. Supposons $u_n = 4$, alors $u_{n+1} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$. Donc (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 4$. 2pts

2/ Cas $u_0 > 4$: Montrons que (u_n) est décroissante.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{12+u_n} - \sqrt{12+u_{n-1}} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{12+u_n} + \sqrt{12+u_{n-1}}}$$

Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ (simple récurrence). Donc le dénominateur précédent est strictement positif. $(\geq 2\sqrt{12})$.

Ainsi $\text{sign}(u_{n+1} - u_n) = \text{sign}(u_n - u_{n-1}) = \cdots = \text{sign}(u_1 - u_0)$ 2pts

Or $u_1 - u_0 = \sqrt{12+u_0} - u_0 = \dfrac{12+u_0-u_0^2}{\sqrt{12+u_0}+u_0}$

$-3 \quad 0 \quad + \quad 4 \quad -$

si $u_0 > 4$, alors $12+u_0-u_0^2 < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et (u_n) sera décroissante. Par récurrence aussi : si $u_n > 4$ alors $12 + u_n > 16 \Rightarrow u_{n+1} > 4$.

3°/ Cas $u_0 < 4$: Les calculs précédents montrent aussi que si $u_0 < 4$ alors $12 + u_0 - u_0^2 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et (u_n) sera croissante. | 2pts

Par récurrence aussi on aura si $u_n < 4 \Rightarrow 12 + u_n < 16$ et $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} < 4$.

4°/ Convergence : Nous venons de voir que $\forall u_0 \geq 0$, (u_n) est soit croissante majorée (par 4) ; soit décroissante minorée (par 4 aussi) ; soit enfin constante (égale à 4). | 2pts

Donc elle est convergente. La limite vérifie l'équation

$$l = \sqrt{12 + l} \Leftrightarrow l^2 - l - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{l = 4}$$

(car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$).

Exercice 2 : (07pts)

1°/ $\forall x \in]1, +\infty[,\ 1 < x^{\alpha/2} < x^{\alpha}$: Si $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$

Comme $\frac{\alpha}{2} < \alpha$ (car $\alpha > 0$) donc $0 < \frac{\alpha}{2} \ln x < \alpha \ln x$ | 1,5

Par application de l'exponentielle : $1 < x^{\alpha/2} < x^{\alpha}$.

2°/ La double inégalité : $[x^{\alpha/2}, x^{\alpha}] \subset]1, +\infty[$ et dans ce cas $\ln$ vérifie toutes les hypothèses du thm des A.F. Donc

$$\exists\, c \in]x^{\alpha/2}, x^{\alpha}[\text{ tq } \ln x^{\alpha} - \ln x^{\alpha/2} = (x^{\alpha} - x^{\alpha/2}) \frac{1}{c}.$$

$$\Leftrightarrow \alpha \ln x - \frac{\alpha}{2} \ln x = \frac{x^{\alpha} - x^{\alpha/2}}{c} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \ln x = \frac{x^{\alpha} - x^{\alpha/2}}{c}.$$ | 4

Mais si $x^{\alpha/2} < c < x^{\alpha}$, alors $\frac{1}{x^{\alpha}} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x^{\alpha/2}}$ d'où

$$1 - \frac{1}{x^{\alpha/2}} < \frac{\alpha}{2} \ln x < x^{\alpha/2} - 1$$

d'où en multipliant par $\frac{1}{x^\alpha}$:

$$\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{x^{3\alpha/2}} < \frac{\alpha}{2}\,\frac{\ln x}{x^\alpha} < \frac{1}{x^{\alpha/2}} - \frac{1}{x^\alpha}$$

3°/ Calcul de la limite: D'après l'inégalité précédente

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{x^{3\alpha/2}}\right) \leq \frac{\alpha}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^\alpha}\right) \leq \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{\alpha/2}} - \frac{1}{x^\alpha}\right)$$ 1,5

or $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha/2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{3\alpha/2}} = 0$; d'où

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^\alpha}\right) = 0}$$

Exercice 3 : (05pts) $g(x) = x^5 - 5x + 1$

$$g'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2-1)(x^2+1) = 5(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

(2pts)

a/ Dans $]-\infty,-1]$: Comme $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, alors $\exists a < 0$ ($|a|$ grand) tel que $g(a) < 0$. Dans $[a,-1]$, g est continue, strictement croissante et $g(a) < 0$, $g(-1) = 5 > 0$; donc $\exists!\, x_0 \in [a,-1]$ tq $g(x_0) = 0$ (1pt)

b/ Dans $[-1,1]$: g est continue, strictement décroissante et $g(-1) = 5$, $g(1) = -3$, donc par le thm. V. I, $\exists!\, x_1 \in [-1,1]$ tq $g(x_1) = 0$ (1pt)

c/ Dans $[1,+\infty[$: $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\exists\, b > 0$ (b grand) tq $g(b) > 0$. Pour les m̂ raisons $\exists!\, x_2 \in [1,b]$ tq $g(x_2) = 0$. (1pt)