

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques  
Année Universitaire 2016/2017.

Première année M.I - Semestre 1.  
Module : *Analyse 1* - Épreuve de Rattrapage.  
Dimanche 02/04/2017 - Durée : 01h30mn.  
Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.

**Exercice 1:** (08pts) On considère la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} & , \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \geq 0 & \text{donné.} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une valeur de  $u_0$  pour laquelle cette suite est constante. Notons cette valeur  $a$ .
2. Revenons au cas général de  $u_0$ . Montrer que si  $u_0 > a$  alors la suite  $(u_n)$  est décroissante et que  $u_n > a, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .
3. Montrer que si  $u_0 < a$  alors la suite  $(u_n)$  est croissante et que  $u_n < a, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .
4. En déduire que quelque soit le choix de  $u_0 \geq 0$ , la suite est convergente et calculer sa limite.

**Exercice 2:** (07pts) On considère la fonction  $f(x) = \text{Ln}x$  dans l'intervalle  $I = ]1, +\infty[$  et  $\alpha > 0$  un paramètre réel fixé.

1. Montrer que  $\forall x \in I$ , on a  $1 < x^{\alpha/2} < x^\alpha$ .
2. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction  $f$  dans l'intervalle  $[x^{\alpha/2}, x^\alpha]$ , montrer que

$$\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{x^{3\alpha/2}} < \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\text{Ln}x}{x^\alpha} < \frac{1}{x^{\alpha/2}} - \frac{1}{x^\alpha}$$

3. En déduire la valeur de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Ln}x}{x^\alpha}$ .

**Exercice 3:** (05pts) On donne la fonction polynômiale  $g(x) = x^5 - 5x + 1$ . En étudiant les variations de  $g$ , et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation  $g(x) = 0$  possède exactement trois racines réelles.

1<sup>ère</sup> année M.I - Semestre 1 - (2016/2017)  
Module: "Analyse 1" - Rattrapage - Corrigé!

Exercice 1. (08pts) 
$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{12+u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \geq 0 \text{ donnée.} \end{cases}$$

1°/ Si on suppose  $(u_n)$  constante, on a la condition nécessaire  $u_1 = u_0$

$$\text{ou } u_1 = \sqrt{12+u_0} = u_0 \Leftrightarrow u_0^2 - u_0 - 12 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(-12) = 49 = 7^2 \quad \Delta \text{ (on } u_0 = \frac{1+7}{2} = -3$$

ou  $u_0 = \frac{1-7}{2} = 4$ . Comme  $u_0 \geq 0$  alors la seule valeur

possible est  $u_0 = 4$ ;  $\boxed{a=4}$ . Montrons qu'elle est suffisante 2pts

par un raisonnement par récurrence. Supposons  $u_n = 4$ , alors

$$u_{n+1} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4. \text{ Donc } (u_n) \text{ est constante si et seulement si } u_0 = 4.$$

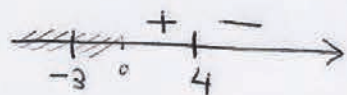
2°/ Cas  $u_0 > 4$ : Montrons que  $(u_n)$  est décroissante.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{12+u_n} - \sqrt{12+u_{n-1}} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{12+u_n} + \sqrt{12+u_{n-1}}}$$

Remarquons que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$  (simple récurrence). Donc le dénominateur précédent est strictement positif. ( $\geq 2\sqrt{12}$ ).

Ainsi  $\text{sign}(u_{n+1} - u_n) = \text{sign}(u_n - u_{n-1}) = \dots = \text{sign}(u_1 - u_0)$  2pts

$$\text{Or } u_1 - u_0 = \sqrt{12+u_0} - u_0 = \frac{12+u_0 - u_0^2}{\sqrt{12+u_0} + u_0}$$



Si  $u_0 > 4$ , alors  $12+u_0 - u_0^2 < 0$ , donc  $u_{n+1} - u_n < 0$  et  $(u_n)$  sera décroissante. Par récurrence aussi: si  $u_n > 4$

$$\text{alors } 12+u_n > 16 \Rightarrow u_{n+1} > 4.$$

3°/ Cas  $u_0 < 4$ : Les calculs précédents montrent aussi

que si  $u_0 < 4$  alors  $12 + u_0 - u_0^2 > 0$  donc

$u_{n+1} - u_n > 0$  et  $(u_n)$  sera croissante.

Par récurrence aussi on aura si  $u_n < 4 \Rightarrow 12 + u_n < 16$

et  $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} < 4$ .

4°/ Convergence: Nous venons de voir que  $\forall u_0 \geq 0$ ,  $(u_n)$

est soit croissante majorée (par 4); soit décroissante  
minorée (par 4 aussi); soit enfin constante (égale à 4).

Donc elle est convergente. La limite vérifie l'équation

$$l = \sqrt{12+l} \Leftrightarrow l^2 - l - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{l = 4}$$

(car  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ ).

Exercice 2: (07pts)

1°/  $\forall x \in ]1, +\infty[$ ,  $1 < x^{\alpha/2} < x^\alpha$ : si  $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$

Comme  $\frac{\alpha}{2} < \alpha$  (car  $\alpha > 0$ ) donc  $0 < \frac{\alpha}{2} \ln x < \alpha \ln x$

Par application de l'exponentielle:  $1 < x^{\alpha/2} < x^\alpha$ .

2°/ La double inégalité:  $[x^{\alpha/2}, x^\alpha] \subset ]1, +\infty[$  et dans ce cas

$\ln$  vérifie toutes les hypothèses du thm des A.F. Donc

$$\exists c \in ]x^{\alpha/2}, x^\alpha[ \text{ tq } \ln x^\alpha - \ln x^{\alpha/2} = (x^\alpha - x^{\alpha/2}) \frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \ln x - \frac{\alpha}{2} \ln x = \frac{x^\alpha - x^{\alpha/2}}{c} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \ln x = \frac{x^\alpha - x^{\alpha/2}}{c}$$

Mais si  $x^{\alpha/2} < c < x^\alpha$ , alors  $\frac{1}{x^\alpha} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x^{\alpha/2}}$  donc

$$1 - \frac{1}{x^{\alpha/2}} < \frac{\alpha}{2} \ln x < \frac{1}{x^\alpha} - 1$$

2

Alors en multipliant par  $\frac{1}{x^\alpha}$  :

$$\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{x^{3\alpha/2}} < \frac{\alpha}{2} \frac{\ln x}{x^\alpha} < \frac{1}{x^{\alpha/2}} - \frac{1}{x^\alpha}$$

3/ Calcul de la limite: D'après l'inégalité précédente

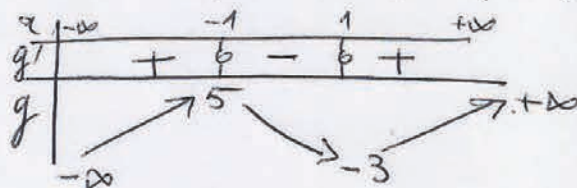
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{x^{3\alpha/2}} \right) \leq \frac{\alpha}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^\alpha} \right) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^{\alpha/2}} - \frac{1}{x^\alpha} \right)$$

or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{3\alpha/2}} = 0$  ; d'où

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^\alpha} \right) = 0}$$

Exercice 3: (05 pts)  $g(x) = x^5 - 5x + 1$

$$g'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 5(x-1)(x+1)(x^2 + 1)$$



a/ Dans  $]-\infty, -1]$ : Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ , alors  $\exists a < 0$  ( $|a|$  grand)

tel que  $g(a) < 0$ . Dans  $[a, -1]$ ,  $g$  est continue, strictement croissante et  $g(a) < 0$ ,  $g(-1) = 5 > 0$ ; donc  $\exists! x_0 \in [a, -1]$  tq  $g(x_0) = 0$

b/ Dans  $[-1, 1]$ :  $g$  est continue, strictement décroissante et

$g(-1) = 5$ ,  $g(1) = -3$ , donc par le thm. V.I.  $\exists! x_1 \in [-1, 1]$

tq  $\underline{g(x_1) = 0}$

c/ Dans  $[1, +\infty[$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , alors  $\exists b > 0$  ( $b$  grand)

tq  $g(b) > 0$ . Pour les m. raisons  $\exists! x_2 \in [1, b]$  tq

$\underline{g(x_2) = 0}$ .