Nom :
Prénom :
Date de Naissance :

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr BELKAID, Tlemcen

05/04/2017
Rattrapage Algèbre 1 + Correction
Durée : 1h-30'

EXERCICE 1 : Soient n et m deux entiers naturels.

- Donner deux équivalents de : $(n < m) \Rightarrow (n = m)$

Un équivalent : $(n \geq m)$ ou $(n = m)$ 1.5pt
Un autre équivalent : $(n \neq m) \Rightarrow (n \geq m)$ 1.5pt

- Donner la négation de $(n \leq m) \Rightarrow (n < m$ ou $n = m)$

La négation est : $n \leq m$ et $(n \geq m$ et $n \neq m)$ 2pts

EXERCICE 2 : Soit f l'application de IR dans IR, définie par :
$f(x) = x / (1 + |x|)$.

- Dresser le tableau de variation de f puis déduire que f est injective.

f est définie, continue et dérivable sur IR.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x / (1 + x) = 1$, 0.25pt

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x / (1 - x) = -1$. 0.25pt

$f'(x) = 1 / (1 + x)^2 > 0$ si $x > 0$, $f'(x) = 1 / (1 - x)^2 > 0$ si $x < 0$.
0.25pt +0.25pt

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-1	------------→	+1

f est strictement croissante donc f est injective. 0.5pt + 0.5pt

****
****
****
****

- Déterminer l'image de IR par f.

1pt D'après le tableau de variation f, $f(IR) =]-1, 1[$

- Trouver l'image inverse du singleton {-1}.

1pt -1 n'est pas élément de f(IR) donc $f^{-1}\{-1\}=\emptyset$

- f est-elle bijective de IR dans [-1, 1] ? Justifier.

1pt Comme $f^{-1}\{-1\}=\emptyset$ (de même $f^{-1}\{1\}=\emptyset$) alors f est non surjective de IR dans [-1, 1] donc f est non bijective.

EXERCICE 3 : Compléter les diagrammes suivants pour qu'une relation binaire R, sur l'ensemble A= {1, 2, 3, 4}, soit :

- symétrique, transitive mais non réflexive, 1pt ou 0

R	1	2	3	4
1				
2		+	+	+
3		+	+	+
4		+	+	+

- réflexive, non symétrique et non transitive, 1pt ou 0

R	1	2	3	4
1	+		+	
2	+	+	+	
3			+	+
4		+		+

- une relation d'équivalence, puis donner la classe d'équivalence de chaque élément de A. 1pt ou 0

R	1	2	3	4
1	+	+	+	+
2	+	+	+	+
3	+	+	+	+
4	+	+	+	+

Cl(1) = A 0.5 pt --

Cl(2) = A 0.5 pt --

Cl(3) = A 0.5 pt --

Cl(4) = A 0.5 pt --

EXERCICE 4 : On définit sur $E = \{0, 1, 2, 3\}$ la relation binaire $\leq$ par : Pour tout x dans E ; $x \leq x$,

$0 \leq x \quad \forall x \in \{0, 1, 2\}, \quad 1 \leq 2 \quad$ et $\quad 1 \leq 3$.

- Cette relation est-elle une relation d'ordre sur E?

1pt R est réfléxive : Pour tout x dans E ; $x \leq x$

1pt R est antisymétrique : dans $0 \leq x \; \forall x \in \{0, 1, 2\}, 1 \leq 2$ et $1 \leq 3$, on a bien : pour tout x, y de E si ($x \leq y$ et $x \neq y$) alors on n'a pas $y \leq x$.

1pt R n'est pas transitive : On a $0 \leq 1$ et $1 \leq 3$ mais on n'a pas $0 \leq 3$.

- Si $\leq$ n'est pas une relation d'ordre, quelle information faut-il rajouter pour qu'elle le devienne? (c.à.d. pour que $\leq$ soit une relation d'ordre ?)

  1pt $0 \leq 3$

- Avec l'information rajoutée, l'ordre est-il total? Justifier.

1pt L' ordre n' est pas total : en effet, on n'a ni $2 \leq 3$ ni $3 \leq 2$.

BAREME :

EXO1: 1er équivalent = 1.5 pt, 2ème équivalent = 1.5pt, négation = 2pts

EXO2 : Tableau de variation + Injection = (1+1) pts, image directe = 1pt, image inverse = 1pt, bijection (oui / non) avec justification = 1 pt.

EXO3 : 1pt, 1pt, 1pt + (0.5pt pour chaque classe) = 2pts.

EXO4 : Relation d'ordre (oui / non), avec justification = 3pts, Information = 1pt, ordre total (oui/non) avec justification = 1pt.