Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math

Année Universitaire 2016/2017
Lundi 16/01/2017
1ière Année LMD-MI

ÉPREUVE FINALE DE MECANIQUE

Durée : 01 h 30mn

<u>Questions de cours</u>: (5pts)

I. Quel est le travail effectué par une force $\vec{F} = 2t\,\vec{i}$ agit sur une particule de masse m=2kg pour un déplacement selon l'horizontale (dl = dx).

- Cette force est-elle conservative ? justifier votre réponse.
- Citer trois forces conservatives.
- Déduire la puissance de cette force.

II. Définir le coefficient de frottement dynamique et celui statique. Quelle est la relation entre ces deux coefficients.

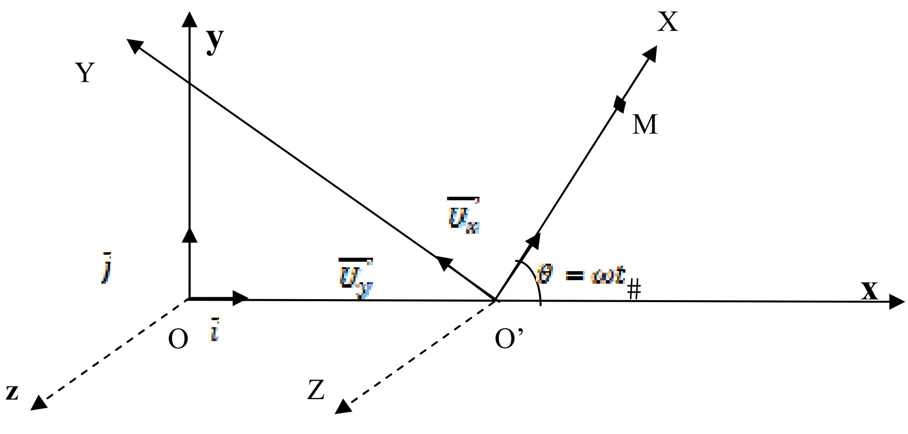
<u>Exercice 1</u> : (8 pts)

Dans le plan Oxy on considère un système d'axes mobiles (O'XY), tel que (Ox) fasse avec (O'X) un angle **variable θ**. Le point O' se déplace sur l'axe (Ox) avec **une accélération constante a**. Un point M mobile sur l'axe **O'X** est repéré par **O'M = r.** On appelle mouvement relatif de M son mouvement par rapport à (O'XYZ) et le mouvement absolu par rapport à (Oxyz). (voir figure 1)

Calculer dans **le repère mobile** :

1- La vitesse relative $\vec{v_r}$, la vitesse d'entrainement $\vec{v_e}$ et déduire la vitesse absolue $\vec{v_a}$.

2- L'accélération relative $\vec{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\vec{a_e}$, l'accélération de Coriolis $\vec{a_c}$ et déduire l'accélération absolue $\vec{a_a}$.



<u>Figure 1</u>

Exercice 2 : (7 pts)

- Une boule **B** de masse m, accrochée à un fil inextensible de longueur **l**, est écartée de sa position d'équilibre d'un angle **α**. On l'abandonne sans vitesse initiale.

En passant par la position verticale, la boule percute (touche) un corps **A** de même masse et s'arrête, le corps **A** passe du point **O** au point **C (OC=d)** sur un plan horizontal rugueux de coefficient de frottement **μ.**

1- Représenter les forces exercées sur le corps A.
2- Quelle est la nature du mouvement sur le plan horizontale.
3- Exprimer la vitesse de la boule B juste avant de toucher le corps A.
4- En utilisant le principe de la conservation de la quantité du mouvement du système, déterminer la vitesse du corps A après l'interaction.
5- Si $\mathbf{v_A=v_B}$ au point **O**, Donner la vitesse du corps A au point C en fonction de g, l, d, α et μ.
6- De quel angle doit on écarter la boule B pour que le corps A arrive au point C avec une vitesse nulle.

- A partir du point C, le corps A aborde la partir CD=L, parfaitement lisse (pas de frottements), inclinée d'un angle β par rapport à l'horizontal (figure 2). Il arrive, sans vitesse initiale, sur un ressort parfait de longueur l_0 et de constante de raideur k.

- Représenter les forces exercées sur A au cours de la compression du ressort
- Quelle est la valeur de la compression maximale du ressort.

On donne m=200g, d=OC=1m, l=10 cm, L=1m, μ=0.1, g=10m/s^2, k=140N/m, β=30°.

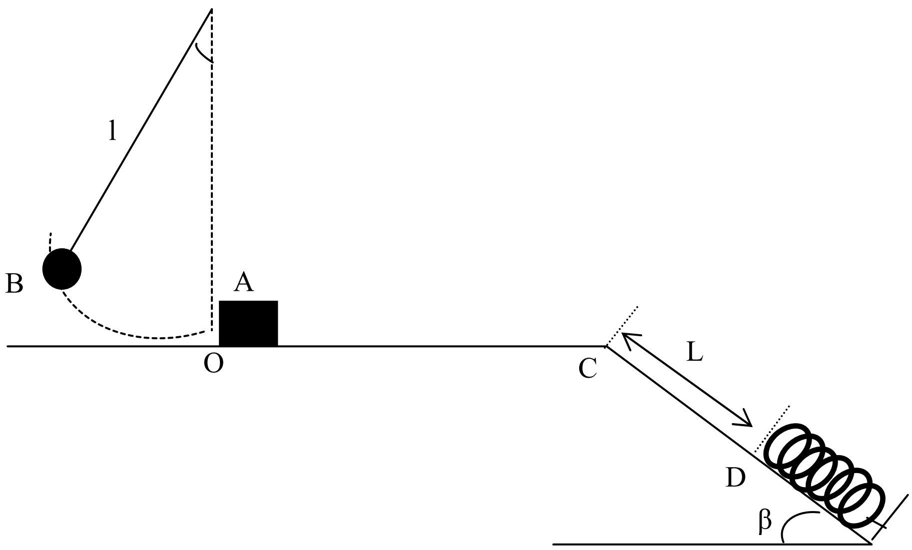


Figure 2

Bon courage

Le corrigé de l'épreuve finale
de mécanique

Questions de cours: (5pts)

1- Le travail effectuer par une force $\vec{F} = 2t\,\vec{i}$ agit sur une particule de masse m=2kg pour un déplacement selon l'horizontale (dl = dx).

On à w= $\int F.dx = \int \vec{F}.\vec{dl}$ **(0.25pts)**

Il faut dx=f(t), pour cela on à $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = 2t\vec{i}$ **(0.5pts)**

$\Rightarrow v = \int_0^t \frac{2t}{m}dt = \frac{t^2}{m}$ $\Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{m}$ $\Rightarrow dx = \frac{t^2}{m}dt$ **(0.5pts)**

Donc $W = \int F.dx = \int_0^t 2t.\frac{t^2}{m}dt$ $\Rightarrow$ $W = \frac{t^4}{2m}$Joule **(0.5pts)**

- F est une force conservative car son travail ne dépend pas du chemin suivi. **(0.5pts)**
- Trois forces conservatives, le poids la force de rappel du ressort, la force de pesanteur. **(0.75pts)**
- La puissance de cette force est : P=dW/dt=$2t^3$/m (Watt). **(0.5pts)**

2- Le coefficient de frottement dynamique se trouve quand il y a mouvement noté $\mu_d = \frac{F_{fd}}{R_N}$. **(0.5pts)**

Le coefficient de frottement statique, c'est celui dans le cas où le système est en équilibre sur une surface rugueuse (pas de mouvement) noté : $\mu_s = \frac{F_{fs}}{R_N}$. **(0.5pts)**

La relation entre les deux coefficients est : $\mu_s \geqslant \mu_d$. **(0.5pts)**

Exercice 1 : (8 pts)

1- Les vitesses :3.5pts

$\vec{v_r} = \frac{\overrightarrow{dO'M}}{dt}$ **(0.25pts)** avec $\overrightarrow{O'M} = r\,\vec{u_x}$ **(0.5pts)** donc $\vec{v_r} = \dot{r}\,\vec{u_x}$ **(0.5pts)**

$\vec{v_e} = \frac{\overrightarrow{dOO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ **(0.25pts)** avec $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\gamma t^2\vec{i}$ **(0.5pts)** donc $\frac{\overrightarrow{dOO'}}{dt} = \gamma t\,\vec{i} = \gamma t(\cos\omega t\,\vec{u_x} - \sin\omega t\,\vec{u_y})$ **(0.25pts)**

$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\omega\,\vec{u_y}$ **(0.25pts)**

$\vec{v_e} = \gamma t\cos\omega t\,\vec{u_x} + (r\omega - \sin\omega t)\,\vec{u_y}$ **(0.25pts)**

$\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e} = (\dot{r} + \gamma t\cos\omega t)\,\vec{u_x} + (r\omega - \sin\omega t)\,\vec{u_y}$ **(0.75pts)**

2- Les accélérations : 4.5pts

$\vec{a_r} = \frac{d\vec{v_r}}{dt} = \ddot{r}\vec{u_x}$ **(1pts)**

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$ **(0. 5pts)**

$$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \gamma\,\vec{i} = \gamma\left(\cos\omega t\,\overrightarrow{u_x} - \sin\omega t\,\overrightarrow{u_y}\right)$$ **(0.5pts)**

$$\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & r\omega & 0 \end{vmatrix} = -r\omega^2\,\overrightarrow{u_x}$$ **(0.25pts)**

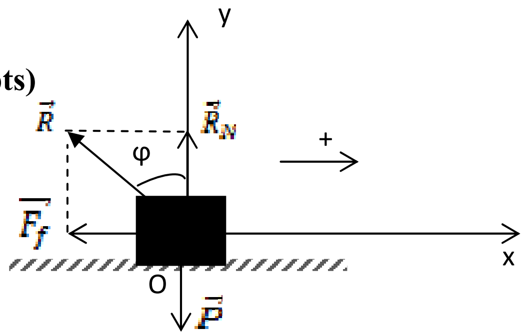
$$\overrightarrow{a_e} = (\gamma\cos\omega t - r\omega^2)\,\overrightarrow{u_x} - \gamma\sin\omega t\,\overrightarrow{u_y}$$ **(0.25pts)**

$$\overrightarrow{a_c} = 2.\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r} = 2.\begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{r} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.\dot{r}\omega\,\overrightarrow{u_y}$$ **(1pts)**

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$$ **(0.25pts)**

$$\overrightarrow{a_a} = (\ddot{r} + \gamma\cos\omega t - r\omega^2)\,\overrightarrow{u_x} + (2\dot{r}\omega - \gamma\sin\omega t)\,\overrightarrow{u_y}$$ **(0.75pts)**

<u>Exercice 2</u> :(7pts)



1- Représentation des forces sur la figure **(0.5pts)**

2- Accélération

D'après le principe fondamental de la dynamique

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{R}_N + \vec{F_f} + \vec{P} = m\vec{a}$ **(0.25pts)**

Par projection sur l'axe (Ox) :- F_f =ma….. (1) **(0.25pts)**

et sur (Oy) ; R_N -P=0 **(0.25pts)**

$\mu = \frac{F_f}{R_N}$ **(0.25pts)** $\Rightarrow F_f = \mu\,R_N$; avec P=R_N donc F_f= $\mu\,m.g$ **(0.25pts)**

(1)$\Rightarrow -\mu\,mg = m.a$ donc a= $-\mu\,g = -1\ m/s^2$ **(0.25pts)**

a=-1 donc on a un mouvement rectiligne uniformément décéléré.

3- Il n'y a pas de frottement donc d'après le principe de conservation de l'énergie mécanique ;

$E_{Mi}=E_{Mf} \Rightarrow E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf}$ **(0.25pts)** avec v_i=0 donc $E_{Ci} = 0$

$E_{Pi} = mgl(1-\cos\alpha)$; $E_{Cf} = \frac{1}{2}mv_f^2$; $E_{Pf} = 0$ **(0.5pts)**

$mgl(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgl(1-\cos\alpha)$ **(0.5pts)**

Donc $v_B = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$ **(0.25pts)**

4- D'après le principe de la conservation de la quantité de mouvement :
P_i (avant le choc)=P_f (après le choc) **(0.25pts)**

$m\overrightarrow{v_B} + \vec{0} = \vec{0} + m\overrightarrow{v_A} \Rightarrow v_A = v_B = \sqrt{2gl(1 - cos\alpha)}$ **(0.25pts)**

5- D'après le principe de l'énergie cinétique entre O et C :

$\Delta E_C = \Sigma W_{(Fext)i} \Rightarrow E_{C_C} - E_{C_O} = W_P + W_{R_N} + W_{F_f}$ **(0.25pts)**

$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_O^2 = -F_f(OC)$ **(0.25pts)**

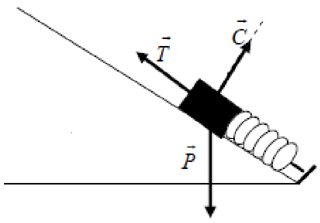
Avec F_f= μ mg et $v_O^2 = 2gl(1 - cos\alpha)$ et OC=d

Donc $v_C = \sqrt{2gl(1 - cos\alpha) - 2\mu gd}$ **(0.5pts)**

6- Cherchant l'angle α pour que v_C=0

$v_C = 0 \Rightarrow \sqrt{2gl(1 - cos\alpha) - 2\mu gd} = 0$ Donc $\cos\alpha = 1 - \frac{\mu d}{l} \Rightarrow \alpha_{min} = \frac{\pi}{2}$ **(0.5pts)**

II. 1- Représentation des forces sur la figure : **(0.5pts)**



2-Il n'y a pas de frottement donc d'après le principe de conservation de l'énergie mécanique entre le point C et D :

$E_{MC}=E_{MD} \Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow E_{C_C} + E_{P_C} = E_{CD} + E_{PD}$ **(0.25pts)** avec v_D=0 car le corps A change de direction au point D donc $E_{CD} = 0$

Le corps aborde la partie CD sans vitesse initiale donc v_C=0 et E_{Cc}=0

$E_{P_C} = mgh$ avec $h = (L + x)\ sin\beta$ donc $E_{P_C} = mg\ (L + x)\ sin\beta$

$E_{PD} = \frac{1}{2}kx^2$

Donc $\frac{1}{2}kx^2 = mg\ (L + x)sin\beta \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mg\ Lsin\beta - mgxsin\beta = 0$ **(0. 5pts)**

$\Rightarrow 70x^2 - x - 1 = 0$

Donc x=12.7cm **(0.25pts)**