Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2016/2017.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Épreuve finale.
Dimanche 15/01/2017 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1: (08pts) On considère l'équation suivante:

$$x^4 - \lambda x^2 + 1 = 0 \qquad (E)$$

où λ est un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs de λ, l'équation (E) possède-t-elle des solutions réelles? Donner dans ce cas le nombre de solutions en fonction des valeurs de λ.
2. Montrer que l'équation (E) peut se mettre sous la forme $f(x) = \lambda$ où f est une fonction réelle à déterminer.
3. Dresser le tableau de variation de f, puis déssiner (C_f), sa courbe représentative.
4. A l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, retrouver les résultats de la première question. (Donner le maximum de détails)

Exercice 2: (06pts) On définit la fonction g par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Montrer que dans l'intervalle $[0, 2]$, la fonction g vérifie toutes les hypothèses du théorème des accroissements finis. Déterminer ensuite tous les nombres $c \in]0, 2[$ tels que $g(2) - g(0) = 2g'(c)$.

Exercice 3: (06pts) Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé et I un intervalle ouvert contenant a. On considère une fonction $f \in C^2(I)$ telle que $f^{(3)}$ existe et est bornée dans I. En utilisant la formule de Taylor en a, écrite à l'ordre 2, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

Montrer par ailleurs, en utilisant l'exemple de la fonction $f(x) = x|x|$, que la limite précédente peut exister sans que f soit de classe $C^2(I)$.

1ère année M.I - Semestre 1 - (2016/2017).

Module : "Analyse 1" - Epreuve finale - Corrigé.

Exercice 1 : (08 pts) $x^4 - \lambda x^2 + 1 = 0$ (E)

1/ On peut transformer l'équation (E), du 4ème degré, en une équation du second degré en posant $X = x^2$. On obtient

$$X^2 - \lambda X + 1 = 0 \quad (E')$$

Ainsi, l'équation (E) possédera des solutions réelles si et ssi l'équation (E') possède des solutions réelles et au moins une telle solution de (E') est positive ou nulle. Calculons le discriminant

$$\Delta = \lambda^2 - 4.$$

(E') admettra des solutions réelles si et ssi $\Delta \geq 0 \iff \lambda^2 - 4 \geq 0$.

Ceci ne suffit pas ! Notons X_1 et X_2 les deux solutions réelles de (E').

On a $X^2 - \lambda X + 1 = (X - X_1)(X - X_2) = X^2 - (X_1 + X_2)X + X_1 X_2$.

Ainsi $\begin{cases} X_1 + X_2 = \lambda \\ X_1 X_2 = 1 \end{cases}$. Grâce à $X_1 X_2 = 1$, on sait que X_1 et X_2 sont de même signe. Si en plus $\lambda \geq 0$ alors $X_1 + X_2 \geq 0$ et, X_1 et X_2 seront positives (et $X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$). En définitive (E) admettra des solutions réelles si et seulement si : $\boxed{\lambda^2 - 4 \geq 0 \text{ et } \lambda \geq 0}$ 1,5

$$\iff \boxed{\lambda \geq 2}$$

- Si $\lambda = 2$: $\Delta = 0 \Rightarrow X_1 = X_2 = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$ et $x_3 = x_4 = -1$ 0,5.
  Il y a deux solutions doubles.
- Si $\lambda > 2$: $\Delta > 0 \Rightarrow X_1 \neq X_2$ et donc il y a 4 0,5
  solutions distinctes $x_1 = \sqrt{X_1}$, $x_2 = -\sqrt{X_1}$; $x_3 = \sqrt{X_2}$, $x_4 = -\sqrt{X_2}$

(On n'a pas besoin de calculer les valeurs de X_i ou x_i).

2°/ $x^4 - \lambda x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 = \lambda x^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \lambda$, si $x \neq 0$.

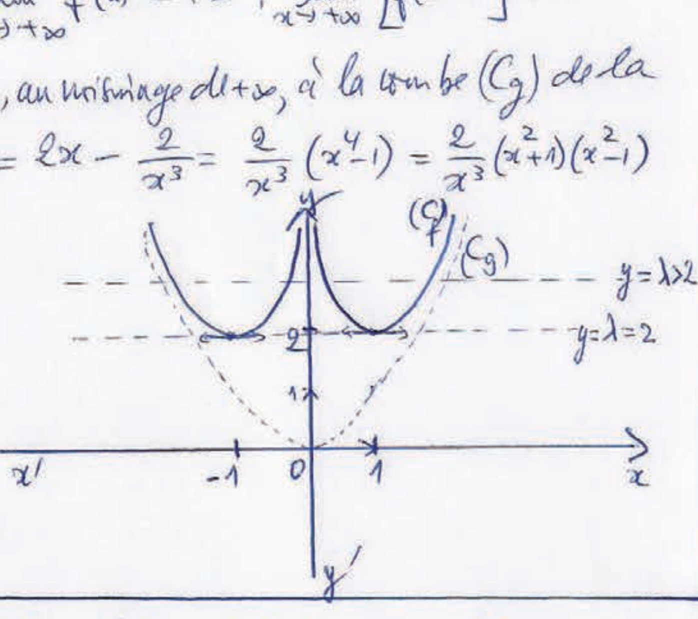
(On remarque que 0 n'est jamais une solution de (E)). Donc (E) est équivalente à $f(x) = \lambda$ où $\boxed{f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}}$ 0,5

3°/ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Le domaine étant symétrique par rapport à 0, on peut étudier la parité de f. On a $f(-x) = f(x)$, donc f est paire et il suffit de mener l'étude sur $I =]0, +\infty[$, puis utiliser la symétrie par rapport à l'axe $x = 0$. 0,25 0,25

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x^2] = 0$ 0,5

La courbe de f est asymptote, au voisinage de $+\infty$, à la courbe (C_g) de la fonction $g(x) = x^2$. $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3}(x^4 - 1) = \frac{2}{x^3}(x^2+1)(x^2-1)$ 0,5

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$



0,5

4°/ • L'équation $f(x) = 2$ possède deux solutions distinctes 1 et -1 (chacune double car $f'(1) = 0 = f'(-1)$). C'est le cas $\lambda = 2$ 1

• On a $f(\mathbb{R}^*) = [2, +\infty[$, donc il existe des solutions à l'éq $f(x) = \lambda$ si et ssi $\lambda \geq 2$. 1

• Fixons $\lambda > 2$: i/ $\exists\, a > 0$ (proche de 0) tq $f(a) > \lambda$ (car $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$)

thm. des valeurs intermédiaires [dans ce cas $f([a, 1]) = [2, f(a)]$. f est manifestement continue donc $\exists\, x_1 \in [a, 1]$ tq $f(x_1) = \lambda$. x_1 est unique car f est strictement décroissante. 1

ii/ La même situation se présente avec $f([1, a']) = [2, f(a')]$, $f(a') > \lambda$

$f([-1, b]) = [2, f(b)]$; $f(b) > \lambda$ et $f([b', -1]) = [2, f(b')]$, $f(b') > \lambda$. $\boxed{2}$

Exercice 2 : (06 pts) $g(x)=\begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x\leq 1 \\ 1/x & \text{si } x>1 \end{cases}$

1°/ Vérification : * Dans $[0,1[$, $g(x)=\frac{3-x^2}{2}$ est continue comme polynôme, et dans $]1,2]$, $g(x)=1/x$ est continue comme fraction rationnelle avec $x\neq 0$ sur $]1,2]$. Reste le point $x_0=1$.

On a $g(1)=\frac{3-1}{2}=1$; $\lim\limits_{x\to 1^<} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^<}\frac{3-x^2}{2}=1=g(1)$ — 2 pts

et $\lim\limits_{x\to 1^>} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^>} 1/x=1=g(1)$, donc g est aussi continue en $x_0=1$.

* Dans $]0,1[$ g est dérivable car c'est un polynôme. Dans $]1,2[$ elle est dérivable comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais. Reste donc le point $x_0=1$.

$$\lim_{x\to 1^<}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^<}\frac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^<}\frac{1-x^2}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1^<}\frac{(1-x)(1+x)}{2(x-1)}=-1$$ — 2 pts

$$\lim_{x\to 1^>}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^>}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^>}\frac{1-x}{x(x-1)}=-1$$

donc g est dérivable à gauche et à droite de $x_0=1$, avec $g'_g(1)=g'_d(1)=-1$

Alors $g'(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x\leq 1 \\ -1/x^2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

* Les conditions du thm des accroissements finis sont vérifiées dans $[0,2]$.

2°/ $g(2)-g(0)=2g'(c) \Leftrightarrow 2g'(c)=\frac{1}{2}-3/2=-1 \Leftrightarrow g'(c)=-1/2$

* Supposons $c\in]0,1]$, alors $-c=-1/2 \Leftrightarrow c=1/2$ (Bon !) — 2 pts
* Supposons $c\in]1,2[$, alors $-1/c^2=-1/2 \Leftrightarrow c^2=2 \Leftrightarrow c=\pm\sqrt{2}$

mais $c\in]1,2[$ donc la seule valeur possible est $c=\sqrt{2}$.

En définitive les valeurs de c sont $\boxed{c=1/2 \text{ et } c=\sqrt{2}}$

Exercice 3 : (06 pts)

1°/ L'application de la formule de Taylor-Young, à l'ordre 2, au point a donne :

$$f(a+h)=f(a)+f'(a).h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\frac{h^3}{6}f'''(a+\theta_h h)$$

En changeant h en −h on obtient $0<\theta_h<1$

$$f(a-h)=f(a)-f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2-\frac{h^3}{6}f'''(a-\theta_{-h}h)$$

$0<\theta_{-h}<1$

D'où

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)+\frac{h}{6}\left[f'''(a+\theta_h h)-f'''(a-\theta_{-h}h)\right]$$

Comme f''' est borné dans I, alors $f'''(a+\theta_h h)-f'''(a-\theta_{-h}h)$ est une quantité bornée. D'où

$$\frac{h}{6}\left[f'''(a+\theta_h h)-f'''(a-\theta_{-h}h)\right]\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

car c'est une quantité qui tend vers 0 ($\frac{h}{6}$), multipliée par une quantité bornée ! D'où

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)}$$

2°/ Considérons l'exemple de $f(x)=x|x|$ et $a=0$. On aura

$$\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2}=\frac{h|h|-h|h|-0}{h^2}=0,\ \forall h\neq 0$$

donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2}=0$ existe. Pourtant f n'est pas $C^2(I)$ car $f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\geq 0\\ -2x & \text{si } x\leq 0\end{cases}=2|x|$ et cette dernière n'est pas dérivable en 0 ($f''(0)$ n'existe pas).

4

2