Nom :
Prénom :
Date de Naissance :

Département de Mathématiques — 17/01/2017
Faculté des Sciences — Examen Final Algèbre 1
Université Aboubekr BELKAID — Durée : 1h-30'

EXERCICE 1 (8 Points) (L'espace réservé aux réponses est suffisant)

1- La relation binaire suivante sur

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ est-elle une relation d'ordre ?

Pour tout x dans E ; $x \leq x$,

$0 \leq x \ \ \forall x \in \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $1 \leq 3$, $3 \leq 5$, $1 \leq 5$ et $2 \leq 4$.

REPONSE : (Utilisez le brouillon avant d'écrire au propre)

0.5 Pt *R est réflexive : en effet, on a pour tout x dans E ; $x \leq x$.*
0.5 Pt *R est antisymétrique : en effet, on a $0 \leq x \ \ \forall x \in \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $1 \leq 3$, $3 \leq 5$, $1 \leq 5$ et $2 \leq 4$. Ceci montre bien que pour $x, y \in E$, si $x \leq y$ et $x \neq y$ alors on n'a pas $y \leq x$.*
1 Pt *R n'est pas transitive : en effet, on a $0 \leq 2$ et $2 \leq 4$ mais on n'a pas $0 \leq 4$.*
R n'est donc pas une relation d'ordre.

2- Si la relation précédente n'est pas une relation d'ordre, quelle information faut-il ajouter pour quelle le devienne ?

REPONSE : (Utilisez le brouillon avant d'écrire au propre)

1 Pt *Il faut rajouter $0 \leq 4$.*

3- Avec l'information ajoutée (question précédente), la relation d'ordre obtenue est-elle totale ? Justifier.

REPONSE : (Utilisez le brouillon avant d'écrire au propre)

1 Pt *La relation n'est pas totale : en effet, 4 n'est pas en relation avec 5 et 5 n'est pas en relation avec 4.*

4- On considère la relation binaire suivante sur E :

Pour tout x dans E ; $x \le x$,

$0 \le x \quad \forall x \in E, \quad 1 \le 3, \quad 3 \le 5, \quad 1 \le 5$ et $2 \le 4$.

Calculer inf {x, y} pour tous les x, y de E.

REPONSE : (Tableau à remplir)

(Utilisez le brouillon avant d'écrire au propre)

NVF = Nombre de valeurs fausses, N = Note sur 3 Pts.
Si $4 \le NVF$ alors $N=0$
Si $NVF= 3$ alors $N=1$
Si $NVF = 2$ alors $N=2$
Si $NVF \le 1$ alors $N=3$

inf(x,y)	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	2	0	2	0
3	0	1	0	3	0	3
4	0	0	2	0	4	0
5	0	1	0	3	0	5

5- Donner une condition pour que sup {4, 5} existe.

REPONSE : (Utilisez le brouillon avant d'écrire au propre)

1Pt Une condition est $4 \le 5$.

EXERCICE 2 (7 Points) (L'espace réservé aux réponses est suffisant)

On considère la relation R sur $Z \times Z^*$ définie par: (a, b) R (c, d) éq $a\,d = b\,c$.

1- Montrer que R est une relation d'équivalence.

REPONSE : (Utilisez le brouillon avant d'écrire au propre)

1 Pt R est réflexive : en effet, $ab = ba$ d'où (a, b) R (a, b)

1 Pt R est symétrique : en effet, si (a, b) R (c, d) alors $ad = bc$ d'où $cb = da$ donc (c, d) R (a, b).

1 Pt si c'est détaillé R est transitive : en effet, si (a, b) R (c, d) et (c, d) R (e, f) alors on a $ad = bc$ et $cf = de$. Multiplions les deux membres de la 2ème équation par b qui est non nul, d'où : $bcf = bde$ donc $adf = bde$. Or $d \neq 0$ alors $af = be$, donc (a, b) R (e, f).

2- Donner les classes d'équivalence des couples $(0, b)$ et $(a, a\text{-}b)$.

REPONSE : (Utilisez le brouillon avant d'écrire au propre)

On a $cl((a, b))=\{(x, y) \in Z \times Z^*$ tel que (a, b) R $(x, y)\}$.

1 Pt $(0, b)$ R (x, y) éq $bx = 0$, donc $x = 0$. Soit $cl((0, b))=\{(0,y), y \in Z^*\}$.

1 Pt $(a, a\text{-}b)$ R (x, y) éq $x = \frac{ay}{a-b}$. Soit $cl((a, a\text{-}b)) = \{(\frac{ay}{a-b}, y), y \in Z^*\}$.

3- On considère l'application

$q : Z \times Z^*/R \rightarrow Q$

$\quad Cl\ ((a, b)) \rightarrow a/b$

où $Cl\ ((a, b))$ est la classe d'équivalence de (a, b).

- Montrer que q est bien définie.

REPONSE : (Utilisez le brouillon avant d'écrire au propre)

1 Pt q est bien une application : en effet, $Cl\ ((a, b))=Cl\ ((c, d))$ veut dire que (a, b) R (c, d), soit $ad = bc$. Donc $a/b = c/d$ (b et d sont non nuls).

- Montrer qu'à chaque rationnel correspond une unique classe dans $Z \times Z^*/R$. Que déduisez-vous ?

REPONSE : (Utilisez le brouillon avant d'écrire au propre)

1 Pt Soit y un rationnel, $y = c/d$, avec (c, d) dans $Z \times Z^*$. On a $c/d = a/b$ donc (a, b) R (c, d). Soit $Cl((a, b)) = Cl((c, d))$. $Cl((a, b))$ est donc unique et donc q est bien une bijection.

EXERCICE 3 (5 Points) (L'espace réservé à la réponse est suffisant)

Sur l'ensemble des cases d'un rectangle quadrillé, on définit la relation R par : A R B si on peut aller de la case A à la case B en se déplaçant d'abord de gauche à droite, puis de bas en haut (les déplacements peuvent être nuls).

					B
C					↑
	A	→	→	→	→

Vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ou partiel ?

REPONSE : (Utilisez le brouillon avant d'écrire au propre)

1 Pt R est réflexive : en effet, toute case est en relation avec elle-même, puisque les déplacements peuvent être nuls.

1 Pt R est antisymétrique : en effet,

La relation entre deux cases A et B avec A ≠ B est tel que, A se déplace vers B ;

- de gauche à droite puis un déplacement nul
- de gauche puis un déplacement nul puis vers le haut
- de gauche à droite puis vers le haut

Cependant, les déplacements contraires ne seront pas des relations.

Dans ce cas si on a A R B et A ≠ B alors on n'aura pas B R A.

1 Pt R est transitive : en effet, si A R B et B R C, alors forcément on aura A R C.

2 Pts R est une relation d'ordre partiel : en effet (voir schéma) ni A n'est en relation avec C, ni C n'est en relation avec A.

--------------------------- FIN ----------------------------