Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2016/2017.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Rattrapage de l'épreuve de contrôle.
Mercredi 14/12/2016 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1: (06pts) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$mx^2 \geq x + m$$

où m est un paramètre réel. En notant S_m l'ensemble solution, déterminer $\inf(S_{-1} \cap S_1)$ et $\sup(S_{-1} \cap S_1)$.

Exercice 2: (08pts) On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \sqrt{1+v_n} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Indication : pour la dernière propriété de l'adjacence, on pourra commencer par établir que

$$|v_n - u_n| \leq \frac{1}{2}|v_{n-1} - u_{n-1}|.$$

2. Calculer leur limite commune.

Exercice 3: (06pts) Montrer, en utilisant la définition de la convergence, qu'une suite convergente dans $\mathbb{R}$ est bornée. La réciproque est-elle vraie ?

Première année M.I - Semestre 1 . (2016/2017)

Module: "Analyse 1" - Rattrapage du Contrôle continu.

Corrigé -

Exercice 1 : (06 pts)

1°/ Résolution de $mx^2 \geq x+m$, m paramètre réel

1er cas : $\boxed{m=0}$ Dans ce cas l'inéquation n'est pas du 2nd degré.

L'inéquation devient simplement $0 \geq x$ car $\boxed{S_0 =]-\infty, 0]}$ 1

2ème cas : $\boxed{m \neq 0}$ L'inéquation s'écrit $mx^2 - x - m \geq 0$.

$\Delta = 1+4m^2 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$. Donc le trinôme admet deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1+4m^2}}{2m}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+4m^2}}{2m}$

On remarque que si $m<0$, $x_2 - x_1 = \dfrac{\sqrt{1+4m^2}}{m} < 0 \Leftrightarrow x_2 < x_1$

et si $m>0$, alors $x_2 > x_1$. Ainsi :

* pour $m<0$, $\quad - \quad x_2 \quad + \quad x_1 \quad -$ $\longrightarrow$ signe du trinôme

et

* pour $m>0$, $\quad + \quad x_1 \quad - \quad x_2 \quad +$ $\longrightarrow$ " 2

Donc :

$$S_m = \left[\frac{1+\sqrt{1+4m^2}}{2m}, \frac{1-\sqrt{1+4m^2}}{2m}\right] \quad \text{pour } m<0$$

$$S_m = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{1+4m^2}}{2m}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1+4m^2}}{2m}, +\infty\right[\quad \text{pour } m>0$$

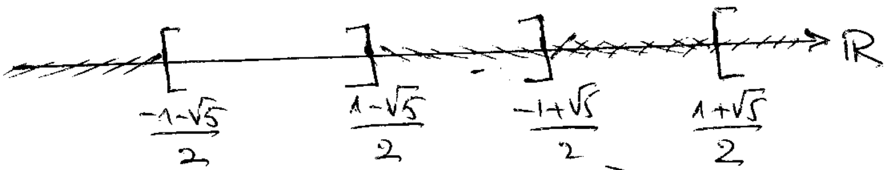
et $S_0 =]-\infty, 0]$

2°/ D'après ce qui précède on a :

si $m=-1$, $S_{-1}=\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$ 0,5

et

si $m=1$, $S_{1}=\left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$ 0,5



d'où $S_{-1}\cap S_{1}=\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$ et 0,5

$\inf(S_{-1}\cap S_{1})=\min(S_{-1}\cap S_{1})=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 0,75

$\sup(S_{-1}\cap S_{1})=\max(S_{-1}\cap S_{1})=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 0,75

Exercice 2 : (08 pts)

1°/ Pour découvrir laquelle est croissante et laquelle est décroissante, on peut, par exemple, commencer à calculer quelques termes de chacune.

$u_0=1$, $u_1=\sqrt{2}>u_0$, $u_2=\sqrt{1+\sqrt{2}}>u_1$ car $2<1+\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}<\sqrt{1+\sqrt{2}}$. 0,5

$v_0=2$, $v_1=\sqrt{3}<v_0$, $v_2=\sqrt{1+\sqrt{3}}<\sqrt{3}$ car $1+\sqrt{3}<3 \Rightarrow \sqrt{1+\sqrt{3}}<\sqrt{3}$. 0,5

Donc on peut conjecturer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.

* Montrons, par récurrence, que (u_n) est croissante.

  - On a déjà $u_1-u_0=\sqrt{2}-1\geq 0$.
  - Supposons que $u_{n+1}-u_n\geq 0$. Calculons $u_{n+2}-u_{n+1}$. 1

$$u_{n+2}-u_{n+1}=\sqrt{1+u_{n+1}}-\sqrt{1+u_n}=\frac{u_{n+1}-u_n}{\sqrt{1+u_{n+1}}+\sqrt{1+u_n}}$$

Donc $u_{n+2}-u_{n+1}\geq 0$. (cqfd).

* (v_n) est décroissante, de la même façon.

- $v_1 - v_0 = \sqrt{3} - 2 \leq 0$.
- $v_{n+2} - v_{n+1} = \dfrac{v_{n+1} - v_n \leq 0}{\sqrt{1+v_{n+1}} + \sqrt{1+v_n} \geq 0}$ donc le résultat. 1

* Calcul de $v_n - u_n$:

$$v_n - u_n = \sqrt{1+v_{n-1}} - \sqrt{1+u_{n-1}} = \frac{v_{n-1} - u_{n-1}}{\sqrt{1+v_{n-1}} + \sqrt{1+u_{n-1}}}$$

Une récurrence là aussi montre que si $v_{n-1} - u_{n-1} \geq 0$ alors $v_n - u_n \geq 0$, partant de $v_0 - u_0 = 2 - 1 \geq 0$. De plus on a :

$$|v_n - u_n| = \frac{|v_{n-1} - u_{n-1}|}{\sqrt{1+v_{n-1}} + \sqrt{1+u_{n-1}}}.$$

Il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$. Donc $\sqrt{1+u_{n-1}} \geq 1$ 3

et $\sqrt{1+v_{n-1}} \geq 1$ d'où $\dfrac{1}{\sqrt{1+v_{n-1}} + \sqrt{1+u_{n-1}}} \leq \dfrac{1}{2}$.

Donc $|v_n - u_n| \leq \frac{1}{2} |v_{n-1} - u_{n-1}|$, et par récurrence

$$|v_n - u_n| \leq \frac{1}{2^n} |v_0 - u_0| = \frac{1}{2^n}.$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} |v_n - u_n| = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

En définitive, ces deux suites sont adjacentes.

2°/ Calcul de la limite : Dans les deux cas on a

$$l = \sqrt{1+l} \iff l^2 - l - 1 = 0.$$

$\Delta = 1 + 4 = 5$, $l_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $l_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ 2.

et $\boxed{l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Exercice 3 : (06 pts)

* Rappelons la définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Fixons par exemple $\varepsilon = 1$. Alors $\exists N(1) \in \mathbb{N}$ tq

$$n \geq N(1) \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq 1$$

ou encore $u_n \in [\ell - 1, \ell + 1]$.

Reste les termes u_k avec $k = 0, 1, 2, \dots, N(1)-1$.

Posons $M = \max\left(1, |\ell - u_0|, |\ell - u_1|, \dots, |\ell - u_{N(1)-1}|\right)$

Ceci donne $\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$ $|u_n - \ell| \leq M \Longleftrightarrow \ell - M \leq u_n \leq \ell + M$

qui veut dire, tout simplement que (u_n) est bornée.

* La réciproque est fausse. En effet, il suffit de regarder le contre-exemple (examiné en cours)

$$u_n = (-1)^n.$$

On a $|u_n| = 1$ donc (u_n) est bornée, bien que $\lim_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas.

4

2

$\boxed{4}$