Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2016/2017.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Epreuve de contrôle.
Jeudi 17/11/2016 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1: (06pts) On définit le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ par :

$$A = \left\{ \frac{k}{|k-2|+1} \quad / \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

1. Montrez que $A \subset [-2, 2]$.
2. Montrez que $\sup A$ et $\inf A$ existent. Déterminez-les ensuite.

Exercice 2: (08pts) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{5}{u_n}\right) \end{cases} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculez u_1, u_2, u_3.
2. Montrez par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
3. Montrez que $\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-1}{8u_n}\left(u_{n-1} - \dfrac{5}{u_{n-1}}\right)^2$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Déduire de tout ce qui précède, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, puis calculez sa limite.

Exercice 3: (06pts) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Montrez que

$$\lim_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

La réciproque est-elle vraie ? A savoir que si $\lim_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Première année M.I - Semestre 1 (2016/2017)
Module : "Analyse 1" - Epreuve de Contrôle - Corrigé

Exercice 1 : (06 pts) $A = \left\{ \frac{k}{|k-2|+1} \; ; \; k \in \mathbb{Z} \right\}$

1°/ Montrer que $A \subset [-2,2]$:

1ère méthode.

Posons $x = \frac{k}{|k-2|+1}$, il suffit de montrer que $|x| \leq 2$. 0,5

On a : $|x| = \frac{|k|}{|k-2|+1}$ et $|k| = |k-2+2| \leq |k-2|+2$ 0,5

donc $|x| \leq \frac{|k-2|+2}{|k-2|+1} \Rightarrow |x| \leq 1 + \frac{1}{|k-2|+1}$ 0,5

D'autre part $|k-2|+1 \geq 1$ car $|k-2| \geq 0$; donc $\frac{1}{|k-2|+1} \leq 1$ 0,5

d'où enfin $|x| \leq 1+1 \Rightarrow |x| \leq 2$

2ème méthode.

On a $|k-2| = \begin{cases} k-2 & \text{si } k \geq 2 \\ 2-k & \text{si } k \leq 1 \end{cases}$ ($k \in \mathbb{Z}$ rappelons-le)

donc $x = \begin{cases} \frac{k}{k-1} & \text{si } k \geq 2 \\ \frac{k}{3-k} & \text{si } k \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{k-1} & \text{si } k \geq 2 \\ -1 + \frac{3}{3-k} & \text{si } k \leq 1. \end{cases}$ 0,5

* On a si $k \geq 2 \Rightarrow k-1 \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{k-1} \leq 1 \Rightarrow \boxed{1 \leq 1 + \frac{1}{k-1} \leq 2}$ 0,5

* Aussi si $k \leq 1 \Rightarrow -k \geq -1 \Rightarrow 3-k \geq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{3-k} \leq 1/2 \Rightarrow \boxed{-1 \leq -1 + \frac{3}{3-k} \leq +1/2}$ 0,5

En définitive $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\; -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow A \subset [-2,2]$. 0,5

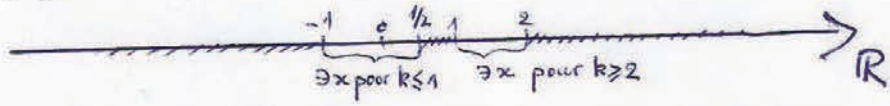
2°/ Sup A et inf A existent : * $A \neq \emptyset$, il suffit de prendre une valeur de k.

* Comme $A \subset [-2,2]$, alors A est majorée par 2 (par exemple) 1
donc Sup A existe, d'après l'axiome de la borne sup ; de plus
A est minorée par -2 (par exemple), donc inf A existe, toujours 1
selon le même axiome.

Détermination de $\sup A$ et $\inf A$:

* Il est facile de voir que pour $k=2$, on a $x=2$. Donc $2 \in A$.
C'est-à-dire 2 est en même temps élément de A et majorant ; donc 1
$\boxed{\sup A = 2 = \max A}$

* D'après les deux expressions de x pour $k \geq 2$ et $k \leq 1$, on remarque que $\forall x \in A$, $x \geq -1$. Donc -1 est minorant de A.
(Une remarque heuristique consiste à dire que pour k tendant vers $-\infty$, $\frac{3}{3-k}$ devient petit positif et donc $-1+\frac{3}{3-k}$ s'approche de -1 par valeurs supérieures à -1 ; ceci nous suggère que -1 sera $\inf A$). Montrons que $-1 = \inf A$. Pour cela on applique la caractérisation de $\inf A$ par « les ε ».
$(-1 = \inf A) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A$ tq $-1 \leq x_\varepsilon < -1+\varepsilon$ (P) ?



a/ Si $\varepsilon > 3/2$ (trop grand), alors (P) est vérifiée avec par exemple $x_\varepsilon = 1/2$ calculé pour $k=1$. $(-1 \leq 1/2 < -1+\varepsilon$ avec $\varepsilon > 3/2)$. 1

b/ Si $\varepsilon \leq 3/2$, alors aucun des x pour $k \geq 2$ ne peut vérifier $-1 \leq x < -1+\varepsilon$ car il sont tous ≥ 1. Il faut chercher donc des x_ε dans la catégorie $k \leq 1$, càd $x = \frac{k}{3-k} = -1 + \frac{3}{3-k} < -1+\varepsilon$

d'où $\frac{3}{3-k} < \varepsilon \implies 3-k > 3/\varepsilon \implies 1-k > \frac{3}{\varepsilon} - 2$

Remarquons que $\frac{3}{\varepsilon} - 2 \geq 0$ car $\frac{3}{\varepsilon} - 2 = \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right) \geq 0$.
Ainsi il y a tous les x pour lesquels $k \in \mathbb{Z}$ et $1-k \geq N(\varepsilon)$ où $N(\varepsilon) = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 2\right] + 1 \in \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{\inf A = -1}$

Exercice 2 : (08 pts) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right), \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1°/ Calcul de u_1, u_2, u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{5}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{3}\right) = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$ 0,25

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{5}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} + \frac{5}{7/3}\right) = \frac{94}{2\times 21} = \frac{47}{21}$$ 0,25

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(u_2 + \frac{5}{u_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{47}{21} + \frac{5}{\frac{47}{21}}\right) = \frac{4414}{2\times 21\times 47} = \frac{2207}{987}$$ 0,5

2°/ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$: $[(P_n) : \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0]$

* Vérifions (P_0), $u_0 = 3 > 0$ selon les données. 0,5

* Supposons que l'on a démontré (P_n) jusqu'à n. Montrons alors que (P_{n+1}) est aussi vraie.

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) \quad \text{par définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$ 0,5

Comme $u_n > 0$, alors $\frac{5}{u_n} > 0$ et aussi $u_n + \frac{5}{u_n} > 0$. Donc $u_{n+1} > 0$.

3°/ $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{8u_n}\left(u_{n-1} - \frac{5}{u_{n-1}}\right)^2$:

On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(-u_n + \frac{5}{u_n}\right)$

$$= \frac{1}{2u_n}\left(5 - u_n^2\right)$$

D'autre part : $u_n^2 = \frac{1}{4}\left(u_{n-1} + \frac{5}{u_{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(u_{n-1}^2 + 10 + \frac{25}{u_{n-1}^2}\right)$ 2,5

$$\Rightarrow 5 - u_n^2 = \frac{1}{4}\left(-u_{n-1}^2 + 10 - \frac{25}{u_{n-1}^2}\right) = -\frac{1}{4}\left(u_{n-1} - \frac{5}{u_{n-1}}\right)^2$$

d'où $\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{8u_n}\left(u_{n-1} - \frac{5}{u_{n-1}}\right)^2}$

(On doit supposer $n \geq 1$ pour pouvoir parler de u_{n-1})

.../...

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ssi : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n \leq 0$.

* Pour $n\geq 1$, $u_{n+1}-u_n = \frac{-1}{8u_n}\left(u_{n-1}-\frac{5}{u_{n-1}}\right)^2 \leq 0$ | 1

car $u_n>0$ ($1^{\text{ère}}$ question) et $(\dots)^2\geq 0$, reste le -1 !

* Pour $n=0$: $u_1-u_0 = \frac{7}{3}-3 = \frac{7-9}{3} = \frac{-2}{9} \leq 0$. | 0,5

4°/ Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et limite :

On vient de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (question 3) et qu'elle est minorée par 0 (question 2) ; donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notons l sa limite. D'après la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut écrire : $l = \frac{1}{2}\left(l+\frac{5}{l}\right)$ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}\right)$ | 1

$\Rightarrow 2l^2 = l^2+5 \Rightarrow l^2=5 \Rightarrow l=\sqrt{5}$ ou $l=-\sqrt{5}$ | 0,5

Comme $u_n>0$, alors $l\geq 0$, d'où $\boxed{l=\sqrt{5}}$ | 0,5

Exercice 3 : (06 pts) Par définition d'une suite de Cauchy, on a

$\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N} : \forall n,p\in\mathbb{N},\ n,p\geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n-x_p|\leq\varepsilon$.

Si on prend $p=n+1$, on obtient :

$\forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_{n+1}-x_n|\leq\varepsilon$ | 3 pts

($p=n+1$, $p\geq N(\varepsilon)$ si $n\geq N(\varepsilon)$, aussi $|x_n-x_{n+1}|=|x_{n+1}-x_n|$).

Ceci est exactement la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$.

La réciproque est fausse. Il suffit de considérer le contre-exemple suivant : $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$ $(n\geq 1)$

On a $x_{n+1}-x_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ | 3 pts

et pourtant (x_n) n'est pas de Cauchy (se référer au cours).