Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid Tlemcen

Documents, portable, tablette et calculatrice sont NON AUTORISES

Contrôle continu — ALGEBRE 1 — 24-Nov-2016 — Durée : 01H:30'

Exercice 1: *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On considère les assertions suivantes:*
P : "$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$"
Q : "$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$"
1- *Donner la négation de* **P** *et de* **Q**.
2- *Montrer que* $\overline{\mathbf{P}} \Rightarrow \overline{\mathbf{Q}}$ *est une assertion fausse. (Raisonnez par contraposition)*

Exercice 2: *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de réels convergente vers une limite* l. *Raisonnez par l'absurde pour montrer que:*
Si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > a$ *(respectivement* $u_n \geq a$*) alors* $l \geq a$.

Exercice 3: *Soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une fonction strictement croissante.*
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \varphi(n) \geq n$.

Exercice 4: *Soient* A, B *et* C *trois ensembles.*
(Ne pas utiliser de table de vérité).
1- *Montrer que:* $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$ *et que* $(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$.
2- *En déduire que:* $(A \cap B)\Delta(A \cap C) = A \cap (B\Delta C)$.

Exercice 5: *Soit* f *l'application* $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z}{1+|z|} \end{array} \right.$, $|z|$ *est le module de* z.
1- *Montrer que si* $f(z_1) = f(z_2)$ *alors* $|z_1| = |z_2|$. *Déduire que* $z_1 = z_2$.
2- On note $D = \{z \in \mathbb{C}\ /\ |z| < 1\}$. *Montrer que* $f(\mathbb{C}) \subset D$.
3- *Donner* $f^{-1}(\{i\})$.
4- **(cours)** f *est-elle bijective de* $\mathbb{C}$ *sur* D*?*

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid Tlemcen

Corrigé du contrôle continu — ALGEBRE 1 — 24-Nov-2016

Exo 1 (2 points) : *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue.*
On considère les assertions suivantes:
$\mathbf{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$"
$\mathbf{Q}$: "$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$"
Question 1- *Donner la négation de* $\mathbf{P}$ *et de* $\mathbf{Q}$.

Réponse: (1 point)
$\overline{\mathbf{P}}$: "$\exists x \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) \neq 0$"
$\overline{\mathbf{Q}}$: "$(\exists x \in \mathbb{R},$ *tel que* $f(x) \leq 0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R},$ *tel que* $f(x) \geq 0)$"

Question 2- *Montrer que* $\overline{\mathbf{P}} \Rightarrow \overline{\mathbf{Q}}$ *est une assertion fausse.*
(Raisonnez par contraposition)

Réponse: (1 point)
La contraposée de $\overline{\mathbf{P}} \Rightarrow \overline{\mathbf{Q}}$ *est* $\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{P}$. *On a* $(\overline{\mathbf{P}} \Rightarrow \overline{\mathbf{Q}}) \Leftrightarrow (\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{P})$.
$\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{P}$ *est fausse. En effet: On suppose que l'assertion*
$\mathbf{Q}$: "$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$" *est vraie, donc une des deux assertions*
$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0)$ OU $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$ est vraie. *(Elles ne peuvent pas être vraies à la fois). Cependant il n'existe aucune valeur réelle de* x *pour laquelle* $f(x)$ *est nulle.*

Exo 2 (4 points) : *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de réels convergente vers une limite* l.
Question - *Raisonnez par l'absurde pour montrer que:*
Si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > a$ *(respectivement* $u_n \geq a$*) alors* $l \geq a$.

Réponse: "u_n *convergente vers* l " *si et seulement si*
$(\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon)$. *Ceci veut dire qu'à partir d'un certain rang* n_0 *tous les termes (la majorité) de la suite* (u_n) *se trouvent dans l'intervalle* $[l-\epsilon, l+\epsilon]$. **(1 point)**
Supposons par l'absurde que: $(\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > a$ *(resp* $u_n \geq a$*) et* $l < a)$ *est vraie.* **(1 point)**
Dans ce cas on peut fixer $\epsilon > 0$, *par exemple* $\epsilon = \frac{a-l}{2}$, *de telle manière que a, avec* $a > l$, *soit en dehors de l'intervalle* $[l-\epsilon, l+\epsilon]$. **(1 point)**
Donc l'assertion "$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > a$ *(resp* $u_n \geq a$*)" supposée vraie contredit le fait que la majorité des termes de la suite* (u_n) *se trouvent dans l'intervalle* $[l-\epsilon, l+\epsilon]$. **(1 point)**

Remarque (Exo2): *Si* $u_n := \dfrac{1}{n+1}$, *on a* $u_n > 0$ *mais* $\lim u_n = 0$; *on ne peut donc pas garder les inégalités strictes en passant à la limlite.*

Exo 3 (4 points) : *Soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une fonction strictement croissante.*
Question - *Montrer par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \varphi(n) \geq n$.

Réponse: *Comme* φ *est définie dans* $\mathbb{N}$ *alors* $\varphi(0)$ *existe et comme* φ *est à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *alors* $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ *donc forcément* $\varphi(0) \geq 0$. **(1 point)**
Fixons n *dans* $\mathbb{N}$ *et supposons que* $\varphi(n) \geq n$. *Montrons alors que pour ce* n *fixé on a* $\varphi(n+1) \geq n+1$. **(1 point)**
Or φ *est strictement croissante. Ceci veut dire que:*
$\forall n, m \in \mathbb{N},\, m > n \Rightarrow \varphi(m) > \varphi(n)$ **(1 point)**
Dans ce cas et puisque $n+1 > n$ *alors on a* $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$.
Donc $\varphi(n+1) > n$.
Or $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$ *donc on a forcément* $\varphi(n+1) \geq n+1$.**(1 point)**
Donc: $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \varphi(n) \geq n$.

Exo 4 (5 points) : *Soient* A, B *et* C *trois ensembles.*
(Ne pas utiliser de table de vérité).
Question 1- *Montrer que:* $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$ *et que* $(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$.

Réponse:
$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) &= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\ &= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \\ &= A \cap B \cap \overline{C} \quad \textbf{(2 points)}\end{aligned}$$
Pour la seconde il suffit d'intervertir B *et* C.**(1 point)**

Question 2- *En déduire que:* $(A \cap B)\Delta(A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$.

Réponse:
$$\begin{aligned}(A \cap B)\Delta(A \cap C) &= (A \cap B)\backslash(A \cap C)) \cup ((A \cap C)\backslash(A \cap B)) \\ &= ((A \cap B) \cap (\overline{A \cap C})) \cup ((A \cap C) \cap (\overline{A \cap B})) \\ &= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \\ &= A \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})) \\ &= A \cap ((B \backslash C) \cup (C \backslash B)) \\ &= A \cap (B \Delta C).\textbf{(2 points)}\end{aligned}$$

Exo 5 (5 points) : *Soit f l'application* $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z}{1+|z|} \end{array} \right.$

Question 1- *Montrer que si* $f(z_1) = f(z_2)$ *alors* $|z_1| = |z_2|$.
Déduire que $z_1 = z_2$.

Réponse: *Soient* z_1, z_2 *dans* $\mathbb{C}$. $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow \dfrac{z_1}{1+|z_1|} = \dfrac{z_2}{1+|z_2|}$

$$\Rightarrow \left|\frac{z_1}{1+|z_1|}\right| = \left|\frac{z_2}{1+|z_2|}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{|z_1|}{1+|z_1|} = \frac{|z_2|}{1+|z_2|}$$

$$\Rightarrow |z_1| = |z_2|\,.\textbf{(1point)}$$

Si $|z_1| = |z_2|$ *alors* $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow \dfrac{z_1}{1+|z_1|} = \dfrac{z_2}{1+|z_1|} \Rightarrow z_1 = z_2$.**(1point)**

Question 2- *On note* $D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\}$. *Montrer que* $f(\mathbb{C}) \subset D$.

Réponse: *Si* $Z \in f(\mathbb{C})$ *alors* $Z = f(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$ avec $z \in \mathbb{C}$. *On remarque que* $|Z| = \left|\dfrac{z}{1+|z|}\right| = \dfrac{|z|}{1+|z|} < 1$, *soit* $Z \in D$. *Donc* $f(\mathbb{C}) \subset D$.**(1 point)**

Question 3- *Donner* $f^{-1}(\{i\})$.

Réponse: $i \in \mathbb{C}$ *(ensemble d'arrivée). Comme les éléments de* $f(\mathbb{C})$ *ont des modules infrieurs à* 1 $(f(\mathbb{C}) \subset D)$, *alors le complexe* i *de module* 1 *n'est pas dans* $f(\mathbb{C})$ *et par suite* $f^{-1}(\{i\}) = \emptyset$.**(1 point)**

Question 4- f *est-elle bijective de* $\mathbb{C}$ *sur* D?

Réponse: *L'application* f *est injective puisque pour* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, *on a:* $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$, *d'après la réponse 1).* **(0.25 point)**
L'application f *est surjective de* $\mathbb{C}$ *sur* D. *En effet:*
Soit $Z \in D$ *tel que* $Z = \dfrac{z}{1+|z|}$. *On pose* $Z = \mathrm{R}e^{i\Theta}$ *et* $z = re^{i\theta}$.
On a $\mathrm{R}e^{i\Theta} = \dfrac{re^{i\theta}}{1+r}$, *soit* $\left\{ \begin{array}{ll} r(1-R) = R, & R < 1 \\ \theta = \Theta + 2kpi, & k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$.
D'ou l'existence de $z = \dfrac{R}{1-R}e^{i\Theta}$.**(0.5 point)**
En conclusion f *est bijective de* $\mathbb{C}$ *sur* D.**(0.25 point)**
