Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

AU / 2015-2016
Durée : 1h 30'

Examen Final (Théorie de Bifurcations)

Exercice 1. Soit le système

$$\begin{cases} x' = xy + x^3 \\ y' = -y - 2x^3 \end{cases}$$

Etudier la stabilité de $(0,0)$.

Exercice 2. Soit le système

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = x(x - x^2 - y) \\ \dot{y} = y(x - a) \end{cases}$$

a un paramètre réel

a) Determiner les points d'équilibre et étudier leur stabilité.

b) Montrer que le système (1) admet pour $a = \frac{1}{2}$ une bifurcation de Hopf.

c) Determiner le type de bifurcation de Hopf.

Exercice 3. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xz - x^4 \\ \dot{y} = x + yz + xyz \\ \dot{z} = -z - (x^2 + y^2) + z^2 + \sin x^3 \end{cases}$$

a) Trouver une approximation de la variété centre en $(0,0,0)$.

b) Etudier la stabilité de $(0,0,0)$.

Barème detaillé

Exercice 1. 04 pts

on projette le système sur la variété centre
$$W_c = \{ (x,y) : y = h(x) \}$$ avec
$$h(0) = h'(0) = 0$$

$h(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

les calculs donnent $a_2 = 0$, $a_3 = -2$. 02 pts

le système réduit s'écrit
$$\dot{x} = + x^3 + O(x^4)$$

Conclusion : $(0,0)$ est instable. 02 pts

Exercice 2. 09 pts

les points d'équilibre sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(a, a-a^2) = (x^*, y^*)$ 1,5 pts

la Jacobienne $J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-3x^2-y & -x \\ y & x-a \end{pmatrix}$

$(0,0)$ est un point d'équilibre dégeneré. 0,5 pt

le point $(1,0)$ est instable si $a>1$ et stable si $a<1$ 1 pt

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} a-2a^2 & -a \\ a-a^2 & 0 \end{pmatrix}$$ 1 pt

si $\frac{1}{2} < a < 1$, (x^*, y^*) est stable si $0 < a < \frac{1}{2}$, (x^*, y^*) est instable.

si $a = \frac{1}{2}$, (1) admet une bifurcation de Hopf. 1pts

Pour déterminer le type de bifurcation, on fait le changement de variables

$$\xi = x - a, \quad \eta = y - a + a^2, \quad \lambda = \frac{1}{2} - a$$

Le nouveau système s'écrit 0,5pt

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda(1-2\lambda)\xi - (\frac{1}{2}-\lambda)\eta - \xi\eta + \xi^2(3\lambda - \frac{1}{2}) - \xi^3 \\ \dot{\eta} = \xi(\eta + \frac{1}{4} - \lambda^2) \end{cases}$$

on remarque $(0,0)$ est un point d'équilibre. La matrice Jacobienne en $\lambda = 0$ admet $\mu_{1,2} = \pm i \frac{1}{\sqrt{8}}$ comme valeurs propres. La matrice de passage est 0,5pt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$ On conclut que $\omega^* = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

En suite, on calcule l'indice de Marsden, $I < 0$. 3pts

07pts Ex3. les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont $\pm i$ et -1

La variété centre est de dimension 2. 1pt

on pose $z = h(x,y) = a x^2 + 2bxy + cy^2 + \cdots$

Les calculs donnent $a = -1$, $b = 0$ et $c = -1$. Ainsi 03pts

W_c est approchée par $z = -x^2 - y^2 + \cdots$

Le système sur W_c devient $\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 - xy^2 + \cdots \\ \dot{y} = x - x^2 y - y^3 + \cdots \end{cases}$

$(0,0,0)$ est stable. 03pts