Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2015/2016.

Master I - E.D.O - Semestre 2.
Module : *Analyse Fonctionnelle II* - Examen Final.
Mardi 24/05/2016 - Durée : 02h.

Exercice 1: (08pts) Montrez que l'opérateur $\dfrac{d}{dx}$ applique l'espace $H^s(\mathbb{R})$ dans $H^{s-1}(\mathbb{R})$. Est-il continu ? Étudiez ensuite dans quels cas il est injectif.

Exercice 2: (07pts) On donne sur $]0,1[$ la fonction

$$f(x) = x^\alpha \, |\ln x|^\beta$$

Déterminez des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels α et β pour que $f \in W^{1,p}(]0,1[)$ avec $p \geq 1$ fixé. (Indication : pour les calculs on pourra utiliser le changement de variable $x = e^{-t}$)

Exercice 3: (05pts) Posons $u_n(x) = \mathbb{1}_{[-n,n]}(x)$

1. Calculez dans $\mathcal{S}'$ la limite $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
2. En déduire, à l'aide de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n\xi}{\xi}$.
3. Déduire ensuite $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\xi$.

Master I – E.D.O – 2015/2016.

Module : "Analyse Fonctionnelle II" – S2.

Examen Final – Corrigé.

Exercice 1 : (08 pts).

1°/ Montrons que $\frac{d}{dx} : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-1}(\mathbb{R})$. En effet ;

soit $f \in H^s(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f'}(\xi) = -i\xi . \hat{f}(\xi)$; et

$$|\widehat{f'}(\xi)| = |\xi| . |\hat{f}(\xi)| \leq \sqrt{1+\xi^2} \, . \, |\hat{f}(\xi)|$$

d'où
$$(1+\xi^2)^{\frac{s-1}{2}} |\widehat{f'}(\xi)| \leq (1+\xi^2)^{\frac{1}{2}+\frac{s-1}{2}} |\hat{f}(\xi)|$$
$$\leq (1+\xi^2)^{s/2} |\hat{f}(\xi)| \quad (*)$$

Puisque $(1+\xi^2)^{s/2} |\hat{f}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R})$ alors
$(1+\xi^2)^{\frac{s-1}{2}} |\widehat{f'}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R})$ aussi.

3 pts

2°/ Continuité de $\frac{d}{dx} : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-1}(\mathbb{R})$:

De l'inégalité (*) on peut écrire :
$$(1+\xi^2)^{s-1} |\widehat{f'}(\xi)|^2 \leq (1+\xi^2)^{s} |\hat{f}(\xi)|^2.$$

et par intégration sur $\mathbb{R}$, on obtient :
$$\| f' \|_{H^{s-1}} \leq \| f \|_{H^s} ;$$

2 pts

d'où la continuité de $\frac{d}{dx}$.

3°/ Injectivité : $\frac{d}{dx}$ étant une application linéaire, l'injectivité s'exprime par $\mathrm{Ker}\left(\frac{d}{dx}\right) = \{0\}$. Soit alors $f \in H^s(\mathbb{R})$ tq $f' = 0$. Or cette équation (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) possède comme solutions les constantes, càd $f(x) = C$ (constante)

Voyons dans quel(s) cas, une fonction constante peut-elle appartenir à $H^s(\mathbb{R})$. Il suffit d'appliquer la définition.

Si $f(x) = C \Rightarrow \hat{f}(\xi) = 2\pi C\, \delta_0$; où δ_0 est la masse de Dirac en 0. Ainsi

$$(1+\xi^2)^{s/2}\, \hat{f}(\xi) = 2\pi C\, (1+\xi^2)^{s/2} . \delta_0$$
$$= 2\pi C\, \delta_0 \quad \text{car } \varphi(\xi)\delta_0 = \varphi(0)\delta_0 .$$

Or, on sait par ailleurs que δ_0 n'est pas une distribution régulière et donc $\delta_0 \notin L^2(\mathbb{R})$. Ainsi le seul cas possible est que $C = 0$; d'où $f \equiv 0$. Ceci prouve que $\forall s \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx} : H^s(\mathbb{R}) \to H^{s-1}(\mathbb{R})$ est injective.

3pts

Exercice 2 : (07pts). $f(x) = x^\alpha\, |\ln x|^\beta$, $x \in]0,1[$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1°/ Pour quels α, β ; $f \in L^p(]0,1[)$:

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx = \int_0^1 x^{\alpha p}\, |\ln x|^{\beta p} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha p+1)t}\, t^{\beta p}\, dt .$$

où on a posé $x = e^{-t}$.

La dernière intégrale est impropre en 0 et à l'∞. La convergence à l'∞ est assurée par $e^{-(\alpha p+1)t}$ à condition que $\alpha p+1>0$.
La convergence en 0^+ est assurée par $t^{\beta p}$ à condition que $\beta p+1>0$.
Donc $f \in L^p(]0,1[)$ ssi $\begin{cases} \alpha p+1>0 \\ \text{et} \\ \beta p+1>0 \end{cases}$! 2pts

2°/ Calcul de f' : $\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$.
Comme φ est à support compact, on peut supposer que
$\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b] \subsetneq]0,1[$. Ainsi

$$\langle f', \varphi\rangle = -\int_a^b x^\alpha |\ln x|^\beta \varphi'(x)\,dx = -\int_a^b x^\alpha(-\ln x)^\beta \varphi'(x)\,dx$$

$$= -\underbrace{\left[x^\alpha(-\ln x)^\beta \varphi(x)\right]_a^b}_{=0} + \int_a^b \left[x^\alpha(-\ln x)^\beta\right]' \varphi(x)\,dx.$$

car $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

$$= \int_a^b \left[\alpha x^{\alpha-1}(-\ln x)^\beta - \beta x^{\alpha-1}(-\ln x)^{\beta-1}\right] \varphi(x)\,dx.$$

$$= \int_a^b x^{\alpha-1}|\ln x|^{\beta-1}\left[-\alpha \ln x - \beta\right] \varphi(x)\,dx \quad \text{3pts}$$

d'où $\boxed{f'(x) = x^{\alpha-1}|\ln x|^{\beta-1}\left[-\alpha\ln x - \beta\right]}$

Maintenant (avec toujours $x = e^{-t}$) on a :

$$\int_0^1 |f'(x)|^p\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-((\alpha-1)p+1)t}\, t^{(\beta-1)p}\,|\alpha t-\beta|^p\,dt.$$

Le terme $|\alpha t-\beta|^p$ ne joue aucun rôle dans la convergence de cette dernière intégrale.

Comme précédemment la convergence aura lieu ssi :

$$(\alpha-1)p+1>0 \quad \text{et} \quad (\beta-1)p+1>0.$$

On remarque que si $(\alpha-1)p+1>0 \Rightarrow \alpha p+1>p>0$ (de même pour β). Donc les dernières conditions impliquent les deux premières. En définitive :

$$\boxed{f\in W^{1,p}(]0,1[) \text{ ssi } \begin{cases}\alpha>1-1/p\\ \beta>1-1/p\end{cases}}.$$

2pts

Exercice 3 : (05 pts) $\quad u_n(x)=\mathbb{1}_{[-n,n]}(x)$.

1°/ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$; On a $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\langle u_n,\varphi\rangle=\int_{-n}^{n}\varphi(x)\,dx, \text{ d'où } \lim_{n\to+\infty}\langle u_n,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$$

($\varphi\in L^1(\mathbb{R})$ car elle est à décroissance rapide à l'∞). 1pt

D'où $\boxed{\text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}),\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=1}$

2°/ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n\xi}{\xi}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, On a $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\langle \hat{u}_n,\varphi\rangle=\langle u_n,\hat{\varphi}\rangle=\int_{-n}^{n}\hat{\varphi}(x)\,dx$$

$$=\int_{-n}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{ix\xi}\varphi(\xi)\,d\xi\right)dx=\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\left(\int_{-n}^{n}e^{ix\xi}\,dx\right)d\xi$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\,\frac{2\sin n\xi}{\xi}\,d\xi \Rightarrow \frac{\sin n\xi}{\xi}=\frac{1}{2}\hat{u}_n(\xi).$$

Comme $u_n \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} 1$, alors la continuité de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ implique :

$$\hat{u}_n \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} \hat{1} \quad \text{et} \quad \hat{1}(\xi) = 2\pi\,\delta_0 .$$

2pts

D'où dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n\xi}{\xi} = \pi\,\delta_0}$

3°/ $\lim_{n\to+\infty} \sin n\xi$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$: $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\langle \sin n\xi , \varphi(\xi) \rangle = \int_{\mathbb{R}} (\sin n\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin n\xi}{\xi}\right) \left(\xi\, \varphi(\xi)\right) d\xi$$

$$= \left\langle \frac{\sin n\xi}{\xi} , \xi\, \varphi(\xi) \right\rangle$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \langle \sin n\xi , \varphi(\xi) \rangle = \langle \pi\,\delta_0 , \xi\,\varphi(\xi) \rangle = 0$

Donc $\boxed{\text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}),\ \lim_{n\to+\infty} \sin n\xi = 0}$

2pts