Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2015/2016.

Master I - E.D.O - Semestre 2.
Module : *Analyse Fonctionnelle II* - Contrôle continu.
Mardi 12/04/2016 - Durée : 02h.

**Exercice 1:** (08pts) Dans l'espace de Hilbert $L^2([-1,1];\mathbb{C})$, on considère l'opérateur $T$ défini par :

$$(Tx)(t) = \int_{-1}^{1} (t-s)\, x(s)\, ds$$

1. Montrez que $T$ est continu, puis qu'il est compact.
2. Déterminez le spectre de $T$.
3. En déduire le rayon spectral de $T$.

**Exercice 2:** (06pts) Soit la suite de fonctions $u_n(x) = \dfrac{n}{n^2x^2+1}$ , $n \geq 1$. Calculez, dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la limite de cette suite. On pose ensuite

$$g_n(x) = \int_{-\infty}^{x} u_n(t)\, dt.$$

Déterminez, toujours dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la limite de $g_n$.

**Exercice 3:** (06pts) Le but dans cet exercice est de calculer la transformée de Fourier de la distribution $T = vp(\dfrac{1}{x})$ (valeur principale de Cauchy). On rappelle que $T$ peut être définie par l'une des deux formules équivalentes

$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\, dx$$

Montrez que $xT = 1$. En déduire que $\widehat{T}$ vérifie une équation différentielle simple du premier ordre. Résoudre complètement cette équation différentielle en calculant la constante d'intégration et ce, en utilisant la fonction test $\varphi(\xi) = \exp(-\xi^2)$. Donnez enfin l'expression de $\widehat{T}$.

# Master E.D.O (2015/2016)

## Module : Analyse Fonctionnelle II (M1 - S2)

## Contrôle - Corrigé.

**Ex 1 : (08 pts)** $H = L^2([-1,1];\mathbb{C})$, $(Tx)(t) = \int_{-1}^{1}(t-s)\,x(s)\,ds$.

1°/ T continu - T compact :

* On a $|(Tx)(t)| \leq \int_{-1}^{1} |t-s|\,|x(s)|\,ds$

$$\leq \|x\|_H \cdot \left(\int_{-1}^{1} |t-s|^2 ds\right)^{1/2} \text{ par Cauchy-Schwarz.}$$

$$\leq \sqrt{2t^2 + 2/3} \cdot \|x\|_H .$$

Alors $|(Tx)(t)|^2 \leq (2t^2 + 2/3)\,\|x\|_H$

2pts

et par intégration sur $[-1,1]$ on aura :

$$\|Tx\|_H^2 \leq \|x\|_H^2 \int_{-1}^{1}(2t^2 + 2/3)\,dt = \frac{8}{3}\,\|x\|_H^2 .$$

donc $\boxed{\|Tx\|_H \leq \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \|x\|_H}$ d'où la continuité.

* Compacité : On remarque que

$$(Tx)(t) = t\left(\int_{-1}^{1} x(s)\,ds\right) - \int_{-1}^{1} s\,x(s)\,ds .$$

càd que $(Tx)(t)$ est combinaison linéaire de deux fonctions $e_1(t) = t$ et $e_2(t) = 1$. Ceci montre que $\mathrm{Im}\,T \subset \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$, et donc T est de rang fini. Comme T est continu, alors T est compact.

2pts

2°/ <u>Spectre de T</u> : Comme T est compact, alors $\sigma(T)$ est formé de 0 et des $\lambda$ ($\neq 0$) valeurs propres. Soit $\lambda \neq 0$. Pour que $\lambda$ soit une valeur propre il suffit qu'il existe $\varphi \not\equiv 0$ tq $T\varphi = \lambda\varphi$. Or $(T\varphi)(t) = a_\varphi \cdot t + b_\varphi = \lambda\varphi(t)$. Donc, puisque $\lambda \neq 0$, $\varphi \in Vect\{e_1, e_2\}$, càd $\varphi(t) = \alpha t + \beta$.
Mettons $\varphi(t) = \alpha t + \beta$ dans l'équation $T\varphi = \lambda\varphi$. On aura

$$\lambda[\alpha t + \beta] = \int_{-1}^{1} (t-s)(\alpha s + \beta)\, ds$$

$$= t\left(\int_{-1}^{1} (\alpha s + \beta)\, ds\right) - \left(\int_{-1}^{1} s(\alpha s + \beta)\, ds\right)$$

$$= 2\beta t - \frac{2}{3}\alpha \quad , \forall t \in [-1, 1]$$

Par identification, on peut écrire :

$$\begin{cases} \lambda\alpha = 2\beta \\ \lambda\beta = -\frac{2}{3}\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\alpha - 2\beta = 0. \\ 2\alpha + 3\lambda\beta = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $D = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 2 & 3\lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 4$.
Si $D \neq 0$ alors $\alpha = \beta = 0$ et $\varphi$ sera $\equiv 0$. Donc l'équation des valeurs propres est donnée par $D = 0 \Leftrightarrow \boxed{3\lambda^2 + 4 = 0}$ qui a pour solutions $\lambda = \pm i\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2i}{\sqrt{3}}$.

D'où $\boxed{\sigma(T) = \left\{0, \frac{2i}{\sqrt{3}}; \frac{-2i}{\sqrt{3}}\right\}}$ 2pts

3°/ <u>rayon spectral de T</u> : Le rayon spectral est le plus petit rayon de disque fermé qui contient $\sigma(T)$. On voit bien que

$$\boxed{r(T) = \frac{2}{\sqrt{3}}} \quad \text{2pts}$$

EX 2 : (06 pts) a/ $u_n(x) = \frac{n}{n^2x^2+1}$ ; $n \geq 1$. Il est clair que $u_n(\cdot)$ est continue, donc définit une distribution régulière par $\langle u_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi(x)\,dx$. Le calcul de $\lim_{n\to\infty} u_n(x)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, veut dire qu'il faut trouver une distribution $L$ tq $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi \rangle = \langle L, \varphi \rangle$.

Ainsi $\langle u_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{n^2x^2+1}\varphi(x)\,dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t/n)}{t^2+1}\,dt \quad \text{(en faisant le changement } nx = t \text{)}.$$

Il est clair que $\left| \frac{\varphi(t/n)}{t^2+1} \right| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{t^2+1}$ et $\frac{1}{t^2+1} \in L^1(\mathbb{R})$

donc le thm de convergence dominée de Lebesgue s'applique.

$$\lim_{n\to+\infty} \langle u_n, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t/n)}{t^2+1}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lim \varphi(t/n)}{t^2+1}\,dt$$

3 pts $$= \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2+1} = \pi\varphi(0) = \langle \pi\delta_0, \varphi \rangle.$$

D'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \pi\,\delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})}$

b/ $\lim g_n$ ? On a $g_n(x) = \left[\operatorname{arctg}(nt)\right]_{-\infty}^{x} = \operatorname{arctg}(nx) + \pi/2$.

$\langle g_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\varphi(x)\,dx$, Cette fois il ne faut pas faire de changement de variable car $\operatorname{arctg} t + \pi/2 \notin L^1(\mathbb{R})$.

On fait la majoration : $|g_n(x)\varphi(x)| \leq \pi\,|\varphi(x)|$ et $|\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R})$

on applique de nouveau le thm de Convergence dominée de Lebesgue.

On obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \langle g_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left( \lim_{n\to+\infty} g_n(x) \right) \varphi(x)\,dx$$

Or $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \begin{cases} \pi & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

D'où $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \langle g_n, \varphi \rangle = \pi \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \langle \pi Y, \varphi \rangle$

où $Y$ est la fonction de Heaviside. Donc

3 pts $\quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \pi\, Y(x), \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})}$

---

**Ex 3 :** (06 pts) $\displaystyle \langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx.$

1/ $xT = 1$ : $\displaystyle \langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{x\varphi(x) + x\varphi(-x)}{x}\,dx$

$$= \int_0^{+\infty} (\varphi(x) + \varphi(-x))\,dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx + \int_0^{+\infty} \varphi(-x)\,dx.$$

2 pts

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

2/ Eq. diff de $\hat{T}$ : Partons de $xT = 1$, on aura

$$\widehat{xT}(\xi) = \hat{1}(\xi) = 2\pi\,\delta_0$$

Or $\displaystyle \widehat{xT}(\xi) = -i \frac{d}{d\xi} \hat{T}(\xi)$ d'où

$$\boxed{\frac{d}{d\xi} \hat{T}(\xi) = 2\pi i\, \delta_0}$$

1 pts

3°/ Détermination de $\hat{T}$ :

$$\frac{d}{d\xi}\hat{T}(\xi) = 2\pi i\,\delta_0$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{T}(\xi) = 2\pi i\, Y(\xi) + C \quad \text{(Y : fonction de Heaviside)}$$

Pour calculer $C$, on applique $\hat{T}$ à $e^{-\xi^2}$.

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}(-x)}{x}\, dx.$$

or si $\varphi(\xi) = e^{-\xi^2}$, $\hat{\varphi}(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-x^2/4}$. C'est une fonction paire donc $\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}(-x) = 0$ d'où $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = 0$.

D'autre part : $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = 2\pi i \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi + C \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2} d\xi$

$$= 2\pi i \frac{\sqrt{\pi}}{2} + C\sqrt{\pi}$$

Donc $\pi i\sqrt{\pi} + C\sqrt{\pi} = 0 \Longrightarrow \boxed{C = -\pi i}$

De là on déduit :

$$\hat{T}(\xi) = 2\pi i\, Y(\xi) - \pi i$$

$$= \pi i\,[2Y(\xi) - 1]$$

$$= \pi i\, \mathrm{sign}(\xi).$$

2pts

$$\boxed{\hat{T}(\xi) = \pi i\, \mathrm{sign}(\xi)}$$