*Université de Tlemcen*
*Faculté des Sciences*
*Département de Mathématiques*

*A.U 2015/2016*
*26 Mai 2016*

Examen final

*Introduction à la théorie de la Bifurcation*

**Exercice**1

Donner la bonne réponse en justifiant.

**1.** Le système dynamique $\dot{z} = (\mu + i\omega)z + (\alpha + i\beta)|z|^2 z$ pour $\alpha < 0$ et $\mu > 0$ , $z \in \mathbb{C}$ , admet

☐ un équilibre instable et un cycle limite
☐ un seul équilibre stable
☐ un équilibre stable et un cycle instable.

**2.** l'équation $x' = x(x+1)(\mu - x^2)$ , subit :

☐ Deux bifurcations differentes
☐ Une seule bifurcation
☐ Deux bifurcations de même nature.

**Exercice**2

Considérons le système (1) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1(\mu - x_1^2) \end{cases}$

**1.** Determiner les points stationnaires et leurs nature.

**2.** Determiner les isoclines esquisser le portrait de phase de (1)

**3.** (1) subit il une bifurcation justifier votre réponse.

**Exercice3** Soit le système (2) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + \mu y - x^2 \end{cases}$

**1.** Determiner les équilibres de ce système et leur nature.

**2.** Pour quelle valeur de $\mu$ , il y a une bifurcation de Hopf. Est elle supercritique?

**3.** Pour $\mu = 0,$ determier $y = y(x)$ telque $(x,y)$ vérifie (2) . En déduire l'existence d'une orbite homoclinique.

**4.** Esquisser le portrait de phase dans les trois cas $\mu < 0; \mu = 0; \mu > 0.$

*Université de Tlemcen* *A.U 2015/2016*
*Faculté des Sciences*
*Département de Mathématiques*

Corrigé de l'examen final
*Introduction à la théorie de la Bifurcation*

**Exercice**1

**1.** Le système dynamique $\dot{z} = (\mu + i\omega)z + (\alpha + i\beta)|z|^2 z$ pour $\alpha < 0$ et $\mu > 0$ , $z \in \mathbb{C}$ , admet
$\boxed{+}$ un équilibre instable et un cycle limite
En effet :
Le système dynamique $\dot{z} = (\mu + i\omega)z + (\alpha + i\beta)|z|^2 z$ pour $\alpha < 0$ et $\mu > 0$ ,peut s'écrire en posant $z = x + iy$;

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - \omega y + (x^2 + y^2)(\alpha x - \beta y) \\ \dot{y} = \mu y + \omega x + (x^2 + y^2)(\beta x + \alpha y) \end{cases}$$

(0,0) est un équilibre, la jacobienne $J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$; les valeurs propres sont $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \mu \pm i\omega \Rightarrow$ (0,0) est un foyer instable car $\mu > 0$ .
En coordonnées polaires le système s'ecrit $\begin{cases} \dot{r} = r(\mu + \alpha r^2) \\ \dot{\theta} = \omega + \beta r^2 \end{cases}$ ,ce qui permet de definir le cycle limite $\gamma(t) = \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

**2.** l'équation $x' = x(x+1)(\mu - x^2)$ , subit :
$\boxed{+}$ Deux bifurcations differentes
En effet, $x' = f(x,\mu) = x(x+1)(\mu - x^2)$. Si $\mu > 0$, cette equation admet 4 points equilibres $x^* = 0,\ x^* = -1, x^* = \pm\sqrt{\mu}$. $Df(x,\mu) = \mu + 2\mu x - 3x^2 - 4x^3$, alors

- $Df(0,0) = 0$ , l'équilibre est nonhyperbolique ( condition de bifurcation) et $Df(0,\mu) = \mu > 0$, ce qui implique que le point fixe $x^* = 0$ est instable. $Df(\pm\sqrt{\mu},\mu) = -2\mu(1 \pm \sqrt{\mu})$, alors le point fixe $x^* = +\sqrt{\mu}$ est stable $\forall \mu > 0$ et $x^* = -\sqrt{\mu}$ est stable que si $\mu < 1$.
  Pour $\mu = 0$ la bifurcation est due au changement du nombre des équilibres.
- Le point fixe $x^* = -1$ est tel que $Df(-1,\mu) = 1 - \mu \Rightarrow$ le point fixe $x^* = -1$ est instable si $0 < \mu < 1$ et stable si $\mu > 1$ : echange de stabilité et $Df(-1,1) = 0$; l' equilibre est nonhyperbolique ( condition de bifurcation).
  Pour $\mu = 1$la bifurcation est due à une perte (gain ) de stabilité.

**Exercice**2 (1) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1(\mu - x_1^2) \end{cases}$

**1.** Les points stationnaires
Si $\mu \leq 0$ (0,0) est le seul point d'équilibre

Si $\mu > 0$ 3 points d'équilibre $(0,0)$; $(\sqrt{\mu}, 0)$ et $(-\sqrt{\mu}, 0)$.

calcul de la matrice de Jacobi $J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu - 3x_1^2 & 0 \end{pmatrix}$

- Donc $J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$

  Si $\mu = 0$ , alors $(0,0)$ n'est pas hyperbolique.
  Si $\mu < 0$ $(0,0)$ est un centre
  Si $\mu > 0$ ; $(0,0)$ est un point selle

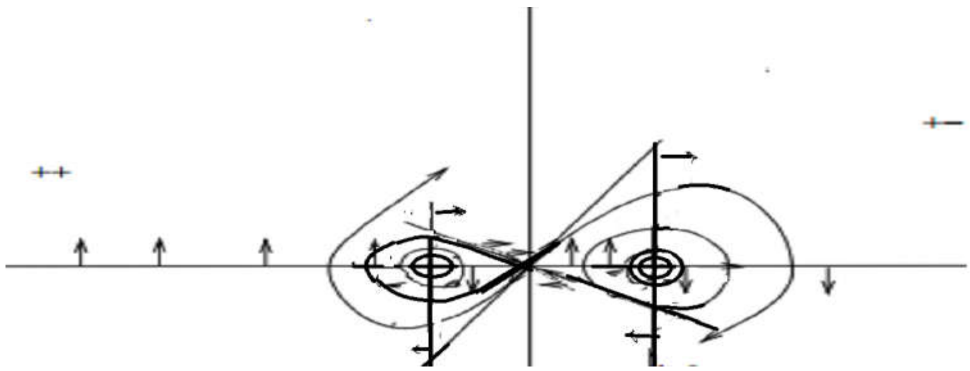
- $J(\pm\sqrt{\mu},0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu & 0 \end{pmatrix}; \mu > 0.$

  $(\pm\sqrt{\mu},0)$ sont des centres

**2.** calcul des isoclines: la première isocline est la droite $x_2 = 0$. Sur cette droite $\dot{x}_2 = \begin{cases} > 0 \text{ si x } \in \left]-\infty,-\sqrt{\mu}\right[ \cup \left]0,\sqrt{\mu}\right[ \\ < 0 \text{ si x } \in \left]-\sqrt{\mu},0\right[ \cup \left]\sqrt{\mu},+\infty\right[ \end{cases}$

La deuxième isocline est l'union des droites $x_1 = 0$ ,$x_1 = \pm\sqrt{\mu}$. sur ces droites $\dot{x}_1 = x_2$, donc le signe de $\dot{x}_1$ est égal au signe de $x_2$.

esquisse du portrait de phase




pour $\mu > 0$

**3.** (1) subit une bifurcation puisque le nombre des équilibre change quand $\mu$ passe du négatif au positif

## Exercice3

Soit le système (2) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + \mu y - x^2 \end{cases}$

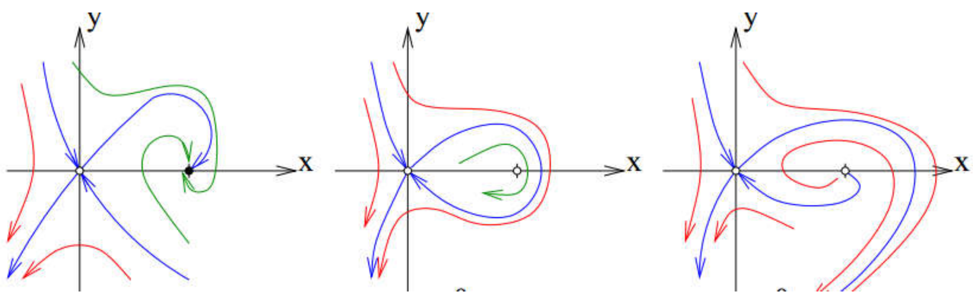
**1.** Les points d'équilibre sont : (0,0) et (1,0). les matrices de Jacobi sont $J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$ $J(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$, Delà on conclut que (0,0) est un point selle (car det J(0, 0) = -1 < 0)et (1,0) est ~~foyer~~ stable ssi $\mu < 0$ (car det J(1, 0) = 1 > 0 et trJ(1, 0) = $\mu$).Remarque il n'y a aucun equilibre stable pour $\mu > 0$!

**2.** Calcul des valeurs propres de J(1, 0) $\lambda(\mu) = \frac{1}{2}(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4})$, qui sont complexes si $-2 < \mu < 2$,
$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ avec $\alpha(\mu) = \mu/2$, $\beta(\mu) = 1/2\sqrt{4-\mu^2}$ . On a alors :

$\alpha(0) = 0$, et $\alpha'(\mu) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha'(0) = \frac{1}{2}$.
$\beta(0) = 1 \neq 0$,
Les hypothèses du théorème de Poincaré-Andronov-Hopf sont vérifiées et par suite il y a une bifurcation de Hopf en $(1,0)$ pour $\mu = 0$ .

**3.** $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{x-x^2}{y} \Leftrightarrow ydy = (x-x^2)dx$
On obtient alors $y^2/2 = x^2/2 - x^3/3 + k$ ; $k \in \mathbb{R}$. $y = \pm\sqrt{x^2 - 2x^3/3 + C}$ (où $C = 2k$)
Si C =0 , on obtient l'orbite homoclinique $y^2 = x^2 - 2x^3/3$. En effet, en posant $x(t) = \frac{1}{t}$ on a bien $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} x^2(t) -- 2x(t)^3/3 = 0$. Cette orbite commence et se termine à l'origine elle est bien homoclinique

**4.** Portrait de phase pour $\mu < 0$, $\mu = 0$, et $\mu > 0$.




$\mu$<0 $\mu$=0 $\mu$>0