Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A.U 2015/2016
21 Avril 2016

Contrôle

Introduction à la théorie de la bifurcation

Questions

Répondre par vrai ou faux en justifiant.

1. Le système dynamique $\dot{x} = \mu x + \alpha x^3$ pour $\alpha > 0$ et $\mu < 0$ admet

☐ trois équilibres dont deux stables

☐ un seul équilibre stable

☐ trois équilibres dont deux instables

2. Les cycles limites séparent des régions où les trajectoires ont des comportements différents ☐

3. Un centre est un cycle limite ☐

Exercice 1

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit

$$x' = \lambda x - \frac{x}{1+x^2}, \tag{E1}$$

1. Trouver les points d'équilibre de l'´equation différentielle (E1) en fonction de λ et les tracer sur le plan (λ, x).

2. Determiner la nature des points d'´equilibre en fonction de λ.

3. Pour quelles valeurs de λ, il y a bifurcation. Identifier le type de bifurcation.

4. En vous servant des questions précédentes, dessiner le diagramme de bifurcation correspondant à (E1).

5. Montrer que $f(\mu, x) = \mu x + \frac{x^3}{1+x^2}$, peut s'écrire $\breve{f}(\lambda, x) = \lambda x - \frac{x}{1+x^2}$, où λ est un paramètre réel à déterminer en fonction de μ. En déduire alors le nombre de points d'équilibre ainsi que leur nature en fonction de μ pour le système

$$x' = \mu x + \frac{x^3}{1+x^2} \tag{E2}$$

6. En vous servant des questions précédentes, dessiner le diagramme de bifurcation correspondant à (E2). Identifier le type de bifurcation.

Exercice 2

Soit le système dynamique suivant (dans $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - y + xy^2 \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu y + y^3 \end{cases}$$

1. Passer en coordonnées polaires et calculer explicitement la fonction de Poincaré.

2. Montrer que ce système admet une bifurcation de Hopf subcritique.

Université de Tlemcen *A.U 2015/2016*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Corrigé du *Contrôle*
Introduction à la théorie de la bifurcation

Pour les questions

1. réponse 3 : les équilibre sont 0 stable et $\pm\sqrt{\frac{-\mu}{\alpha}}$ instables.

2. Le cycle limite sépare des régions où les trajectoires ont des comportements différents s'il est semi-stable, i.e $\omega(q) = \gamma$ pour tout $q \in V \cap Ext(\gamma)$ et $\alpha(q) = \gamma$ pour tout $q \in V \cap Int(\gamma)$; ou réciproquement.

3. Un centre est un phénomène linéaire(il est associé à un système linéaire); un point d'equilibre est dit centre si les valeurs propres de la linéarisée sont imaginaires pures : toutes les trajectoires dans son voisinage sont periodiques. Le centre n'est ni attractif, ni répulsif.
Un cycle limite est un phémomène nonlinéaire (il est associé à un système non linéaire), il correspond à une solution périodique pour le système considéré, dont les autres courbes définies par la même équation différentielle spiralent autour . Le cycle est attractif si les trajectoires voisines s'en approchent. Et il est répulsif dans le cas contraire.

<u>Exercice 1</u>

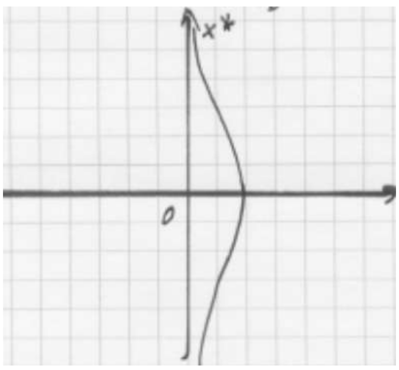
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit

$$x' = \lambda x - \frac{x}{1+x^2}, \qquad \text{(E1)}$$

1. les points d'équilibre de (E1)

$x\left(\lambda - \frac{1}{1+x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 = \frac{1}{\lambda} - 1$

Donc, si $\lambda \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ il y a un seul equilibre $x^* = 0$;
et si $\lambda \in]0,1[$ il y a trois equilibres $x_1^* = 0$; $x_2^* = +\sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1}$; $x_3^* = -\sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1}$.



2. Nature des points d'´equilibre en fonction de λ.

posons $f(x,\lambda) = \lambda x - \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow D_x f(x,\lambda) = \lambda - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

i) si $0 < \lambda < 1$ alors $x_1^* = 0$ est stable et $x_2^*; x_3^*$ sont instables.

ii) si $\lambda \leq 0$ alors $x_1^* = 0$ est stable

iii) si $\lambda \geq 1$ alors $x_1^* = 0$ est instable.

3. Bifurcation

- (E1) admet l'équilibre $x_1^* = 0$ en $\lambda = 0$ et $D_x f(0,0) = -1 \neq 0;$ donc en $\lambda = 0$ il ne peut y avoir bifurcation (la condition necessaire à la bifurcation n'est pas vérifiée).
- (E1) admet l'équilibre $x_1^* = 0$ en $\lambda = 1$ et $D_x f(0,1) = 0$ la condition necessaire à la bifurcation est vérifiée.
  On a $D_\lambda f(0,1) = 0$ et $D_{xx} f(0,1) = 0$; le developpement de Taylor de f au point $(0,1)$ s'écrit

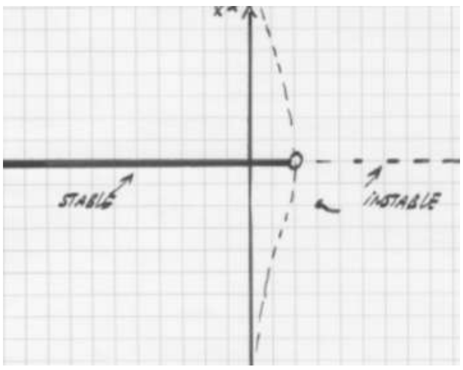
$$\begin{aligned} f(x,\lambda) &= 2D_{x\lambda}f(0,1)x(\lambda-1) + D_{xxx}f(0,1)x^3 + 3D_{xx\lambda}f(0,1)x^2(\lambda-1) + O((\lambda-1)^2) \\ &= 2x(\lambda-1) + 6x^3 + O(\lambda^2) \\ &= 2x((\lambda-1) + 3x^2) + O(\lambda^2) \end{aligned}$$

on obtient bien trois branches de solutions stationnaires pour $0<\lambda < 1$

$SignD_{x\lambda}f(0,1) = signD_{xxx}f(0,1)$ $\Rightarrow$C'est une fourche subcritique

Remarque un developpement de taylor de $\frac{x}{1+x^2}$ au voisinage de 0 nous permet d'identifier $f(x,\lambda)$ à $\lambda x - x + x^3$ $=(\lambda-1)x + x^3$ = forme normale subcritique.

4. Le diagramme de bifurcation



5. $f(\mu,x) = \mu x + \frac{x^3}{1+x^2} = \mu x + \frac{x^3+x-x}{1+x^2} = \mu x + x - \frac{x}{1+x^2} = \lambda x - \frac{x}{1+x^2}$, où $\lambda = \mu + 1$.
le système

$$x' = \mu x + \frac{x^3}{1+x^2} \qquad \text{(E2)}$$

s'identifie à (E1) en faisant une translation du paramètre $\lambda = \mu + 1$.

6. La bifurcation est une fourche subcritique pour $\mu = 0$

et le diagramme est obtenu du précédant par translation de 1 à gauche

Exercice 2

1. en coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $;\theta \in [0,2\pi), r \geq 0$

le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - y + xy^2 \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu y + y^3 \end{cases}$$

s'écrit $\begin{cases} \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \mu r + r^3 \sin^2\theta & (1) \\ \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 1 & (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow \theta = t + \theta_0$(on pourra remarquer que $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}$)

(1)est alors une Bermouilli $\frac{dr}{d\theta} = \mu r + r^3 \sin^2(\theta) \ldots\ldots (eq.\,diff.$ L1)

L'application de Poincaré $P(ro) = r(t(2\pi, r_o, 0), r_o, 0)$

---

la résolution de l'équation de Bermouilli

en posant $u = r^{-2}$; l'équation devient $u' + 2\mu u = (\cos 2\theta - 1)$

$u = Ke^{-2\mu\theta} + \frac{1}{\mu^2+1}(\sin 2\theta + \mu\cos 2\theta - \mu^2 - 1)$

D'où: $r(\theta, \mu) = \left(\frac{\mu^2+1}{(\sin 2\theta + \mu\cos 2\theta - \mu^2 - 1) + (\mu^2+1)Ke^{-2\mu\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$r(t, \mu) = est$ obtenu en remplaçant θ par $t + \theta_0$; pour simplifier prenons $\theta_0 = 0 \Rightarrow r(t, \mu) = \left(\frac{\mu^2+1}{(\sin 2t + \mu\cos 2t - \mu^2 - 1) + (\mu^2+1)Ke^{-2\mu t}}\right)^{\frac{1}{2}}$

on a $r(0, \mu) = r_0 \Leftrightarrow K = \frac{1}{r_0^2} + \left(1 - \frac{\mu}{\mu^2+1}\right)$

D'où $r(t, \mu) = \left(\frac{\mu^2+1}{(\sin 2t + \mu\cos 2t - \mu^2 - 1) + (\mu^2+1)\left(\frac{1}{r_0^2} + \left(1 - \frac{\mu}{\mu^2+1}\right)\right)e^{-2\mu t}}\right)^{\frac{1}{2}}$

---

2. le système admet (0,0) comme équilibre $\forall \mu \in \mathbb{R}$

la jacobienne est $\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$

les valeurs propre sont complexes conjuduées $\bar{\lambda}(\mu); \lambda(\mu) = \mu \pm i$ et traversent l'axe imaginaire pur en $\mu = 0$ avec une vitesse positive i.e $Re(\lambda(0)) = 0$ et $\frac{dRe(\lambda(0))}{d\mu} = 1 > 0$

la stabilité change quand $Re(\lambda)$ traverse $0 \Rightarrow$ Bifurcation de Hopf

le premier coeficient de Lyapunov $a = \frac{1}{2} > 0. \Rightarrow$ Cas subcritique.