Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2015/2016.

Master I - E.D.O - Semestre 2.
Module : *Analyse Fonctionnelle II* - Examen de Rattrapage.
Jeudi 09/06/2016 - Durée : 02h.

Exercice 1: (10pts) On considère les deux fonctions

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = xf(x) = \sin x$$

1. Montrez que f et g sont dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
2. Calculez les transformées de Fourier de f et g respectivement.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de s, $f \in H^s(\mathbb{R})$? Même question pour g.
4. Que peut-on conclure au sujet de l'opérateur $M : f \to xf$ dans les espaces $H^s(\mathbb{R})$.

Exercice 2: (10pts) On considère l'espace $Z = L^p(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|(u,v)\|_Z = \|u\|_p + \|v\|_p$, et l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R})$ avec sa norme habituelle $\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p$. On définit l'application J suivante :

$$\begin{aligned} J : W^{1,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow Z \\ u &\longrightarrow (u, u') \end{aligned}$$

1. Montrez que J est injective et continue.
2. Montrez, à travers un contre-exemple simple, qu'elle n'est pas surjective.
3. Posons $F = ImJ$. Montrez que F est fermée. (On peut donc identifier $W^{1,p}(\mathbb{R})$ avec F)
4. Soit L une forme linéaire continue sur $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Montrez, en utilisant le théorème de Hahn-Banach, que L peut se prolonger à Z.
5. En déduire l'expression générale de L.

Master E.D.O – S2 – 2015/2016.

Module : "Analyse Fonctionnelle II".

Rattrapage – Corrigé.

Ex1 : (10 pts) $\quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $g(x) = \sin x = x f(x)$.

1°/ $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

* f est continue sur $\mathbb{R}$ et $|f(x)| \leq 1$. $\forall x \in \mathbb{R}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$

et $$|\langle f, \varphi\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)||\varphi(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)|\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq \left[\sup_{\mathbb{R}}\left((1+x^2)|\varphi(x)|\right)\right]\cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\leq \pi\left[q_{0,0}(\varphi) + q_{2,0}(\varphi)\right]$$

1pt

où $q_{m,j}(\varphi) = \sup_{\mathbb{R}} |x^m \varphi^{(j)}(x)|$ désigne une semi-norme définissant la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donc $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

* De la même façon $|g(x)| \leq 1$ et g est continue.

Donc $$|\langle g, \varphi\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}} |\sin x|\left((1+x^2)|\varphi(x)|\right)\cdot \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\leq \pi\left[q_{0,0}(\varphi) + q_{2,0}(\varphi)\right].$$

1pt

2°/ Calcul de $\hat{f}$ et $\hat{g}$:

* $\hat{f}$: On sait que $\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)}(\xi) = \frac{2\sin\xi}{\xi}$. D'autre part, $\mathbb{1}_{[-1,1]} \in L^2(\mathbb{R})$, donc $f \in L^2(\mathbb{R})$ et la formule d'inversion s'applique.

$$\frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$$

On change ξ en $-\xi$ $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\,\frac{\sin x}{x}\,dx = \pi\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(-\xi) = \pi\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(\xi)$

car elle est paire. Donc $\boxed{\hat{f}(\xi) = \pi\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(\xi)}$ 2pts

Rque : Puisque $f \in L^2(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier usuelle et celle au sens des distributions ($\mathcal{S}'(\mathbb{R})$) coïncident.

* $\hat{g}$: $g \notin L^1(\mathbb{R})$ et $g \notin L^2(\mathbb{R})$. Donc on doit calculer sa transformée de Fourier uniquement au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$$\langle \hat{g}, \varphi\rangle = \langle g, \hat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}} (\sin x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx \quad , \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{ix}\hat{\varphi}(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} e^{-ix}\hat{\varphi}(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[2\pi\,\varphi(-1) - 2\pi\,\varphi(1)\right]$$ par la formule d'inversion.

$$= (-i\pi)\,\langle \delta_{-1} - \delta_1, \varphi\rangle$$

Donc $\boxed{\hat{g} = (-i\pi)(\delta_{-1} - \delta_1)}$ 2pts

3°/ s ? tq $f \in H^s(\mathbb{R})$: Comme $\hat{f}(\xi) = \pi \, \mathbb{1}_{[-1,1]}(\xi)$ alors

$$(1+\xi^2)^{s/2}|\hat{f}(\xi)| = \pi (1+\xi^2)^{s/2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(\xi)$$

et $(1+\xi^2)^{s}|\hat{f}(\xi)|^2 = \pi^2 (1+\xi^2)^{s} \mathbb{1}_{[-1,1]}(\xi)$.

$$= \begin{cases} \pi^2 (1+\xi^2)^s & \text{si } -1 \le \xi \le 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit bien que $(1+\xi^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}), \forall s \in \mathbb{R}$.

Donc $\boxed{f \in H^s(\mathbb{R}) \;, \forall s \in \mathbb{R}}$ 1pt

s ? tq $g \in H^s(\mathbb{R})$: On a $\hat{g}(\xi) = (-i\pi)(\delta_{-1} - \delta_1)$

d'où $(1+\xi^2)^{s/2} \hat{g}(\xi) = (-i\pi)(1+\xi^2)^{s/2}(\delta_{-1} - \delta_1)$

$$= (-i\pi)\left(2^{s/2}\delta_{-1} - 2^{s/2}\delta_1\right)$$

$$= (-i\pi)\, 2^{s/2}(\delta_{-1} - \delta_1)$$

Or $\delta_{-1} - \delta_1$ étant singulière, n'appartient pas à L^2, pour aucune valeur de s. Donc

$$\boxed{\begin{array}{c} \nexists\, s \in \mathbb{R} \text{ tq } g \in H^s(\mathbb{R}) \\ \text{ou bien } \forall s \in \mathbb{R}, \; g \notin H^s(\mathbb{R}) \end{array}}$$

1pt

4°/ Commentaire au sujet de $M : f \longmapsto xf$: Sur l'exemple précédent, on a que $f \in H^s(\mathbb{R}), \forall s \in \mathbb{R}$ et $M(f) \notin H^{s'}, \forall s' \in \mathbb{R}$.

Donc il n'existe aucun $s' \in \mathbb{R}$ tq $M : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s'}(\mathbb{R})$.

(M n'opère pas sur les espaces $H^s(\mathbb{R})$). 2pts

Ex2 : (10 pts) $Z = L^p(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R})$; $\|(u,v)\|_Z = \|u\|_p + \|v\|_p$

$\boxed{p \geq 1}$ et $W^{1,p}(\mathbb{R})$: $\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p$.

1°/ J est injective et continue : $J : W^{1,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow Z$

$u \longmapsto J(u) = (u, u')$.

On voit bien que $\|J(u)\|_Z = \|u\|_{1,p}$ et que J est linéaire ; donc si $J(u) = 0 \Rightarrow u = 0$. D'où l'injectivité. L'égalité précédente montre en plus que

2pts

$$\|J(u)\|_Z \leq 1 . \|u\|_{1,p} \quad (\text{en fait} =).$$

D'où la continuité.

2°/ J non-surjective : Soit $h \in L^p(\mathbb{R})$ avec $h \neq 0$.

On a que $(0, h) \in Z$, mais si $(0,h) = J(u_0)$ ceci implique que $u_0 = 0$ et $u_0' = h$, mais $u_0' = 0$ qui contredit l'hypothèse $h \neq 0$.

2pts

3°/ $F = \mathrm{Im}\, J$: Pour montrer que F est fermé dans Z ; on peut procéder par les suites. Soit (w_n) une suite dans F qui converge vers w_* dans Z. Il faut montrer que $w_* \in F$.

On a $w_n \in F \Leftrightarrow w_n = (u_n, u_n')$; Comme $w_* \in Z$, $w_* = (h, g)$.

$$w_n \xrightarrow{Z} w_* \Leftrightarrow \|(u_n, u_n') - (h,g)\|_Z \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \|u_n - h\|_p + \|u_n' - g\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2pts

Mais $\|u_n - h\|_p \leq \|u_n - h\|_p + \|u_n' - g\|_p$

et $\|u_n' - g\|_p \leq \|u_n - h\|_p + \|u_n' - g\|_p$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} h$ et $u_n' \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} g$.

Il n'y a plus qu'à montrer que $g = h'$ (au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

On a $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle u_n', \varphi\rangle = -\langle u_n, \varphi'\rangle$$

$$\downarrow$$

$$\langle g, \varphi\rangle = -\langle h, \varphi'\rangle = \langle h', \varphi\rangle$$

D'où $g = h'$ au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4°/ Prolongement de L : Soit $L : W^{1,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ lin. continue.

càd $\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, $|L(u)| \leq k \cdot \|u\|_{1,p}$.

Comme on peut identifier $W^{1,p}$ avec F, posons :

2pts

$$\tilde{L}(u,u') = L(u),$$ $\tilde{L}$ est une forme linéaire sur F,

et $|\tilde{L}(u,u')| \leq k \,\|(u,u')\|_Z$.

Le théorème de Hahn-Banach assure que $\tilde{L}$ se prolonge à Z en une forme linéaire continue $\tilde{\tilde{L}} : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ avec la même majoration : $|\tilde{\tilde{L}}(u,v)| \leq k \,\|(u,v)\|_Z$.

Donc $\tilde{\tilde{L}} \in Z^*$ (le dual de Z).

5°/ Expression de L : il est clair que $Z^* \cong L^q(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Comme $\tilde{\tilde{L}} \in Z^*$, il existe un couple unique $(a,b) \in L^q(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$ tq $\tilde{\tilde{L}}(u,v) = \int_{\mathbb{R}} a(x)u(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} b(x)v(x)\,dx$.

En particulier si $(u,v) = (u,u')$ (avec $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$), on aura

2pts

$$\boxed{L(u) = \tilde{L}(u,u') = \tilde{\tilde{L}}(u,u') = \int_{\mathbb{R}} a(x)u(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} b(x)u'(x)\,dx}$$