

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2015/2016.

Master I - E.D.O - Semestre 1.
Module : *Analyse Fonctionnelle I* - Epreuve de Rattrapage
Mardi 06/09/2016 - Durée : 02h.

Exercice 1: (10pts) On considère l'espace $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On fixe un ensemble $K \subset B_E(0, 1)$ fermé et uniformément équicontinu. Posons

$$\begin{aligned} S : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longrightarrow S(\varphi) = \varphi(0) \end{aligned}$$

1. Montrez que S est une application continue.
2. Montrez que la constante $a_K = \sup_K |S(\varphi)|$ existe et qu'elle est atteinte.
3. Posons $b_K = \sup_K \|\varphi\|_\infty$. Montrez que $a_K \leq b_K$.

Exercice 2: (10pts) On considère l'espace $E = C([0, 1], \mathbb{C})$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On y définit l'opérateur

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow E \\ x &\longrightarrow Tx \quad \text{où} \quad (Tx)(t) = \int_0^1 \max(t-s, 0) x(s) ds \end{aligned}$$

1. Montrez que T est compact.
2. Montrez que T n'admet aucune valeur propre non nulle.
3. En déduire le spectre de T .

Master E.D.O - S1 - 2015/2016
Module : "Analyse Fonctionnelle 1"
Rattrapage - Corrigé.

Ex 1: (10 pts) $E = C([0,1]; \mathbb{R})$, $\|\varphi\|_\infty = \sup_{[0,1]} |\varphi(t)|$

$$S: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto S(\varphi) = \varphi(0)$$

1°/ S est continue: En effet, S étant linéaire, il suffit de montrer que $\forall \varphi \in E$, $|S(\varphi)| \leq M \cdot \|\varphi\|_\infty$. Or

(2pts) $|S(\varphi)| = |\varphi(0)| \leq \sup_{[0,1]} |\varphi(t)| = \|\varphi\|_\infty \Rightarrow |S(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty$ ctd.

2°/ $a_K = \sup_K |S(\varphi)|$: $K \subset B_E(0,1)$ implique que K

est borné. Comme c'est un sous-ensemble fermé et équi continu par hypothèse, alors d'après le théorème d'Ascoli Arzela,

(5pts) K est compact dans E. Comme S est une application continue, sur K, S est bornée et atteint ses bornes (c'est une propriété des applications continues sur des compacts). Il en est de même pour l'application $\varphi \mapsto |S(\varphi)|$. Donc a_K existe et elle est atteinte, i.e., $\exists \varphi_0 \in K$ tq $a_K = |S(\varphi_0)|$.

3°/ $a_K \leq b_K$: On a $|S(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty \Rightarrow \sup_K |S(\varphi)| \leq \sup_K \|\varphi\|_\infty$

d'où $a_K \leq b_K$. (3pts)

Ex2: (10 pts) $T: E \longrightarrow E$
 $x \longmapsto Tx$ tq $(Tx)(t) = \int_0^1 \max(t-s, 0) x(s) ds$

1°/ T compact: D'abord $\max(t-s, 0) = \begin{cases} t-s & \text{si } t-s \geq 0 \\ 0 & \text{si } t-s \leq 0 \end{cases}$
 $= \begin{cases} t-s & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t \leq s \end{cases}$

Donc $(Tx)(t) = \int_0^t (t-s) x(s) ds$

* T est linéaire (évident). T est continu car

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &\leq \int_0^t (t-s) |x(s)| ds \\ &\leq \|x\|_{\infty} \int_0^t (t-s) ds = \|x\|_{\infty} \cdot \left[-\frac{(t-s)^2}{2} \right]_0^t \\ &\leq \frac{1}{2} t^2 \|x\|_{\infty} \end{aligned}$$

Donc $\|Tx\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \|x\|_{\infty}$

Soit B un borné dans E ($\exists M > 0$ tq $\forall x \in B, \|x\|_{\infty} \leq M$).

Alors $T(B)$ est borné car T est continu. Reste à montrer

que $T(B)$ est uniformément équicontinu. En effet on a:

$$\begin{aligned} \forall x \in B, (Tx)(t_1) - (Tx)(t_2) &= \int_0^{t_1} (t_1-s) x(s) ds - \int_0^{t_2} (t_2-s) x(s) ds \\ &= \int_0^{t_1} (t_1-t_2) x(s) ds - \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s) x(s) ds \quad (\text{on a supposé } t_1 \leq t_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| &\leq \int_0^{t_1} |t_1-t_2| |x(s)| ds + \int_{t_1}^{t_2} |t_2-s| |x(s)| ds \\ &\leq |t_1-t_2| \|x\|_{\infty} \cdot t_1 + \|x\|_{\infty} \cdot (t_2-t_1) \cdot t_2 \end{aligned}$$

car $|t_2-s| = t_2-s \leq t_2$ car $s \geq t_1 \geq 0$.

Donc $|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| \leq 2M |t_1-t_2| \Rightarrow \delta_{\varepsilon} = \varepsilon/2M$.

Alors l'uniforme équicontinuité.

5 ph

D'après le thm d'Ascoli-Arzelà, $\overline{T(B)}$ est compact, donc T est un opérateur (continu) compact.

2°/ $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \emptyset$; Soit $\lambda \neq 0$. On suppose que λ est une valeur propre de T , c-à-d $\exists x_0 \neq 0$ tq $Tx_0 = \lambda x_0$.

$$\text{d'm (*) } \lambda x_0(t) = \int_0^t (t-s) x_0(s) ds \quad (x_0 \text{ est cont. donc } (t-s)x_0(s) \text{ est cont.} \Rightarrow \int_0^t (t-s)x_0(s) ds \text{ est dérivable})$$

$$\Rightarrow^{(**)} \lambda x_0'(t) = \int_0^t x_0(s) ds \quad (\text{dérivable aussi.})$$

$$\Rightarrow \lambda x_0''(t) = x_0(t) \Rightarrow \boxed{x_0'' - \frac{1}{\lambda} x_0 = 0}$$

$$\text{L'éq. caractéristique } r^2 - \frac{1}{\lambda} = 0 \Rightarrow r = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\text{et } x_0(t) = C_1 e^{t/\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-t/\sqrt{\lambda}}$$

$$\text{D'après (*) on a } x_0(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$$

$$\text{et } \boxed{x_0(t) = 2C_1 \operatorname{sh}(t/\sqrt{\lambda})}$$

$$\text{D'après (**)} \quad x_0'(0) = 0 \Rightarrow \frac{2C_1}{\sqrt{\lambda}} = 0 \quad (ch 0 = 1)$$

$$\Rightarrow C_1 = 0 \text{ donc } \boxed{x_0 \equiv 0} \text{ contradiction!}$$

donc λ n'existe pas.

(3 pts)

3°/ $\sigma(T)$: On sait d'après la théorie générale que $\sigma(T)$ est formé de 0 et de valeurs propres non-nulles. Comme ces dernières n'existent pas

alors

$$\boxed{\sigma(T) = \{0\}}$$

(2 pts)