*Université de Tlemcen* *07/09/2016*
*Faculté des Sciences*
*Département de Mathématiques*

LMD M I Master en Mathématiques Option : Equations différentielles

*Corrigé de l'épreuve de Rattrapage (Semestre 1)*

*Equations différentielles théorie globale*

**Exercice1** (6pts)

Résoudre explicitement le problème suivant,

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{x(t)(1+t^2)} e^{x^2(t)} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

il s'agit d'une equation differentielle à variable séparable $xe^{-x^2}dx = \frac{dt}{1+t^2}$

d'où

$$-\frac{1}{2}e^{-x^2} = \arctan(t) + C$$

la condition initiale $x(0) = 1$ permet de determiner C.

$$C = \frac{-1}{2e}$$

De là ,

$$x(t) = \sqrt{-\ln(-2\arctan(t) + e^{-1})}\,;\text{pour } t \in (a,b)$$

avec $a = \tan(e^{-1}/2 - 1/2)$

La fonction $f(t,x) = \frac{1}{x(1+t^2)} e^{x^2}$ est continue et localement lipschitzienne en x,le th. de Cauchy Lipshitz implique que c'est l'unique solution maximale du problème.

**Exercice 2** (6pts)

On considère le système différentiel suivant:

$$(1)\begin{cases} x'(t) = (3t-1)x(t) + (t-1)y(t) \\ y'(t) = -(t+2)x(t) + (t-2)y(t) \end{cases}.$$

**1**. en remplaçant $(x,y)$ par $(\psi,-\psi)$ dans (1) on obtient 2 fois l'équation

$$\psi'(t) = 2t\psi(t)$$

Ce qui permet d'obtenir $X_1(t) = (e^{t^2},-e^{t^2})$.

**2**. En cherchant la solution $X_2$ sous la forme $X_2(t) = \varphi(t)X_1(t) + (0,z(t))$, on obtient le système

$$\begin{cases} \varphi'(t)e^{t^2} = (t-1)z(t) \\ -\varphi'(t)e^{t^2} + z(t) = (t-2)z(t) \end{cases}$$

En ajoutant les 2 équations, on obtient $z'(t) = (2t-3)z(t)$, d'où

$$z(t) = z(0)e^{t^2-3t}$$

Donc

$$\varphi'(t) = (t-1)z(0)e^{-3t}$$

et

$$\varphi(t) = \varphi(0) + z(0)(\frac{2-3t}{9}e^{-3t} - \frac{2}{9})$$

Comme $X_1(t) = (1,-1)$ ,$X_2(0) = (\varphi(0), -\varphi(0) + z(0))$ on peut choisir$\varphi(0)$ et $z(0)$ tels que $X_1(0) \neq X_2(0)$ ( par exemple $\varphi(0) = 0$ et $z(0) = 1 \Rightarrow X_2(0) = (0,1)$) on a alors

$$X_2(t) = \left(e^{t^2}(\frac{2-3t}{9}e^{-3t} - \frac{2}{9}), e^{t^2}(\frac{2-3t}{9}e^{-3t} - \frac{2}{9}) + e^{t^2-3t}\right)$$

**3**. Le système est linéaire et d'ordre 2 et $X_1, X_2$ sont linéairement indépebdante donc forment une base de l'espace solution.

**Exercice 3** (8pts)

**1**. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Soit le problème de Cauchy (P)$\begin{cases} y' = -y + \frac{y^4}{1+t^2} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ ,

$f(t,y) = -y + \frac{y^4}{1+t^2}$, est de classe C$^1$, elle est donc localement lipshitzienne en y uniformément par rapport à $t$. Le théorème de Cauchy Lipshitz entraine l'existence et l'unicité de solution maximale pour (P) , dont l'intervalle maximal d'existence est $]a,b[$ un voisinage de $0$ (i.e $a < 0 < b$).

**2**. Soit le changement de fonction $v(t) = e^t y(t) \Leftrightarrow v(t)e^{-t} = y(t)$, (P) s'écrit alors:

$$y' = v'(t)e^{-t} - v(t)e^{-t} = -v(t)e^{-t} + \frac{(v(t)e^{-t})^4}{1+t^2} \Leftrightarrow v'(t) = \frac{v(t)^4 e^{-3t}}{1+t^2}$$

et $v(0) = y(0) = y_0$.

$v$ vérifie le problème de Cauchy suivant

(P)' $\begin{cases} v' = \frac{v^4 e^{-3t}}{1+t^2} \\ v(0) = y_0 \end{cases}$ ,

**3**. L'équation intégrale vérifiée par v est,

$$v(t) = y_0 + \int_0^t \frac{v(s)^4 e^{-3s}}{1+s^2} ds$$

Celle vérifiée par y est alors,

$$e^t y(t) = y_0 + \int_0^t \frac{e^{4s} y(s)^4 e^{-3s}}{1+s^2} ds$$

qui s'écrit:

$$y(t) = e^{-t} y_0 + \int_0^t \frac{e^{s-t} y(s)^4}{1+s^2} ds \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Forme integ.)}$$

**4**. Soit $T$ tel que $0 < T < b$. Supposons que pour tout $t \in [0,T]$ on ait $|y(t)| \leq 1$.

Enoncé du lemme de Gronwall, forme integrale : Soient $u, f$ : $[t_0; t_1] \to \mathbb{R}^+$deux fonctions continues telles que, pour un certain C>0 on a :

$$u(t) < C + \int_{t_0}^{t} u(s)f(s)ds, \quad \forall t \in [t_0; t_1]$$

alors,

$$u(t) < C\exp(\int_{t_0}^{t} f(s)ds), \qquad \forall t \in [t_0; t_1]$$

En prenant en considération $|y(t)| \leq 1, \ \forall t \in [0, T]$ , (Forme integ.) permet d'écrire

$$|y(t)| < e^{-t}|y_0| + \int_0^t |y(s)|ds \quad , \forall t \in [0, T]$$

Gronwall entraine: $\left| y(t) \right| \leq e^{-t}|y_0|\exp(\int_0^t ds) = |y_0|, \forall t \in [0, T].$

**5**. Si $|y_0| < 1$. La question précédante permet d'obtenir que $|y(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [0, T], \forall T < b$. Donc $|y(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [0, b[$, par conséquent ,et en faisant appel à la contraposée du th. d'explosion on obtient $b = +\infty$.