Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2015/2016.
Septembre 2016.
Optimisation sans contraintes (L3-S5)

Epreuve de rattrapage

(durée : 01h 45mn)

Questions de cours et exemples d'application [**07.50 pts**]

1) f étant une fonction strictement convexe sur un esp. vect. E, montrer que si f admet, au moins, un minimum dans E alors celui-ci est unique. (**1pt**)
2) Soit f : **R** $\to$ **R**

$$x \to f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ -x/2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   a) Montrer que f est convexe sur R. (**1pt**)
   b) f admet-elle un minimum sur R ? Justifier. (**1pt**)
3) Dans $\mathbf{R}^2$ montrer que $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \alpha x_2^2 - 1$ est strictement convexe si $\alpha > 0$. Pour $\alpha > 0$ trouver ensuite son min dans $\mathbf{R}^2$ (c.àd. résoudre $\min_{x \in R^2} f(x)$) et déterminer sa valeur optimale. (**2.5pts**)
4) Montrer que la fonction convexe f : $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \to f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 + 1$ admet plusieurs minima dans $\mathbf{R}^3$. Trouver aussi sa valeur optimale. (**2pts**)

Exercice 1 [**09.50 pts**]

Soit **g** une fonction de **R** dans **R** définie par $\mathbf{g}(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } 0 \le x \le a \\ (x-a)^2 + b & \text{si } x > a \end{cases}$. avec $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^+$ et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}$.

1) **g** est-elle continue sur **R** ? Justifier. (**1pt**)
2) **g** est-elle dérivable sur **R** ? Justifier. (**1pt**)
3) **g** est-elle deux fois dérivable sur **R** ? Justifier. (**1pt**)
4) Tracer le graphe de **g** lorsque **a** = 1 et **b** = 0. (**1pt**)
5) Montrer que si **a** = 0 alors **g** est strictement convexe sur **R**. (**1pt**)
6) Montrer que si **a > 0** alors **g** est seulement convexe sur **R**. (**1pt**)
7) Sur quel sous-intervalle de **R g** est strictement convexe (lorsque a > 0) ? (**1pt**)
8) Dans les deux cas (**a** = 0 puis **a** > 0) déterminer l'ensemble SO des solutions optimales du problème d'optimisation sans contraintes $\min_{x \in R} g(x)$. Déterminer ensuite la valeur optimale. (**2.5pts**)

Exercice 2 [**3 pts**]

Dans $\mathbf{R}^2$, on considère la fonction : **f** : $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \to f(x_1, x_2) = \mathbf{c}\,(x_1 + x_2)^2 + \mathbf{d}$, **c** et **d** étant deux paramètres réels.

1) Calculer la dérivée directionnelle d'ordre1 de **f** au pt (x_1, x_2) ds une direction quelconque $h=(h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2$. C'est-à-dire calculer $\langle f'(x_1, x_2), (h_1, h_2) \rangle_2$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ désigne le produit scalaire ds $\mathbf{R}^2$. (**1pt**)
2) Trouver l'expression de la forme bilinéaire **f ''**(x_1, x_2) représentant la dérivée directionnelle d'ordre 2 de **f** au pt (x_1,x_2) (c.àd. calculer **f ''**(x_1,x_2) (h,k) $\forall h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2$). (**1pt**)
3) Montrer que si le paramètre **c** est strictement positif (**c** > 0) alors **f** est **convexe** sur $\mathbf{R}^2$ mais **pas strictement convexe** sur $\mathbf{R}^2$ et ceci $\forall d \in \mathbf{R}$. (**1pt**)

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année univ. 2015/2016.
Septembre 2016
Optimisation sans Contraintes

Corrigé de l'épreuve de rattrapage

Questions de Cours

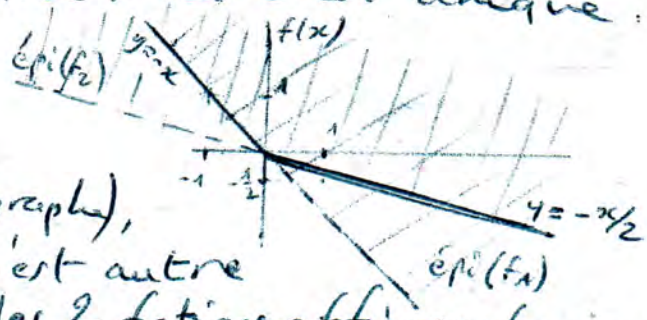
1) f strict. convexe sur l'$\mathbb{R}$-esp. vect. E. f admet, au moins, 1 min. ds E. Supposons alors que f admet deux minima x_1 et x_2 ds E i.à.d. $f(x_1)=f(x_2)=\min_E f(x)=\alpha$. Ds ce cas, ns avons :

$$f(x_1)=f(x_2)\leq f\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}x_1+\tfrac{1}{2}x_2}_{\in E}\Big)\underset{f \text{ strict. convexe}}{<}\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)=\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}=\alpha=f(x_1)=f(x_2)$$

Contradiction.

Dc nécessairement $x_1=x_2$ et le min. de f sur E est unique.

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)=\begin{cases}-x & \text{si } x\leq 0\\ -x/2 & \text{si } x>0\end{cases}$



a) Par 1 démonstration géométrique (épigraphe), il est clair que l'épigraphe de f n'est autre que l'intersection des épigraphes des 2 fctions affines : $f_1: x\mapsto -x$ et $f_2: x\mapsto -x/2$. épi(f_1) et épi(f_2) st convexes puisque f_1 et f_2 st affines (dc convexes (et concaves)) $\Rightarrow$ épi$(f)=$ épi$(f_1)\cap$ épi(f_2) est convexe $\Rightarrow f$ convexe.

b) f n'admet pas de min sur $\mathbb{R}$ puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

3) Ds $\mathbb{R}^2$, $\alpha>0$ $f:(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)=x_1^2+\alpha x_2^2-1$ est strict. conv $\Leftrightarrow$ Hess(f) admet des valeurs propres réelles strict. >0 :

$$\text{Hess}(f)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\alpha\end{pmatrix} \text{ puisque } \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)=2x_1,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)=2\alpha x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=2\alpha \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}=0$$

Donc Hess(f) admet 2 valeurs propres 2 et 2α qui st >0 lorsque $\alpha>0$

$\nabla f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2x_1\\ 2\alpha x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ Donc $(0,0)$ l'unique sol. optimale de $\min_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)$ et $f(0,0)=-1$ valeur optimale.

4) Etant donnée la fction convexe $f: (x_1,x_2,x_3) \mapsto f(x_1,x_2,x_3) = 2(x_1+x_2+x_3)^2 + 1$
on peut remarquer qu'il s'agit d'1 combinaison strict. positive puisque c'est la somme d'1 carré $(\geq 0) \times 2 + 1$
la valeur minimale de cette expression est atteinte lorsque $x_1+x_2+x_3=0$ (c'est l'équation d'1 plan de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine)
Donc chaque fois que cette somme est nulle on obtiendra 1 sol. optimale: $(x_1, x_2, -x_1-x_2)^T$ (ex: $(0,0,0), (-1,-1,2), (1,5,-6), \dots$)
la valeur optimale est bien sûr $f(0,0,0) = f(x_1,x_2,-x_1-x_2) = 1$
<u>Autre façon de faire</u>: $\nabla f(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)^T \iff 4(x_1+x_2+x_3) = 0$
$\iff x_3 = -x_1 - x_2$
De l'ens. des sol. opt. est: $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 = -x_1 - x_2\}$

<u>Ex1</u>

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = \begin{cases} x^2+b & \text{si } x<0 \\ b & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ (x-a)^2+b & \text{si } x>a \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^+ \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

1) g étant polynomiale par intervalles $(]-\infty,0[,]0,a[,]a,+\infty[)$, elle est donc continues à l'intérieur de ces intervalles il reste à étudier la continuité en 0 et en a: $\lim_{x \lessgtr 0} g(x) = b = g(0) = \lim_{x \gtrless 0} g(x)$
Donc g cont. en 0
De m̂: $\lim_{x \lessgtr a} g(x) = b = g(a) = \lim_{x \gtrless a} g(x)$. Dc g cont. sur $\mathbb{R}$.

2) Pour les m̂ raisons qu'en 1) g est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]0,a[\cup]a,+\infty[$.
<u>En 0</u>: $\lim_{x \to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+b-b}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0 = \lim_{x \to 0} \frac{b-b}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x}$
sur $]-\infty,0[$ $g'(x) = 2x$ et sur $]0,a[$ $g'(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0^-} g'(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} g'(x)$
Donc g dérivable en 0 et g' cont. en 0
<u>En a</u>: $\lim_{x \to a^-} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{b-b}{x-a} = 0 = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^2+b-b}{x-a} = \lim_{x \to a^+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$
sur $]0,a[$ $g'(x) = 0$ et sur $]a,+\infty[$ $g'(x) = 2(x-a)$. Aussi $\lim_{x \to a^-} g'(x) = 0 = \lim_{x \to a^+} g'(x)$
Donc g dérivable en a et g' cont. en a.
g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

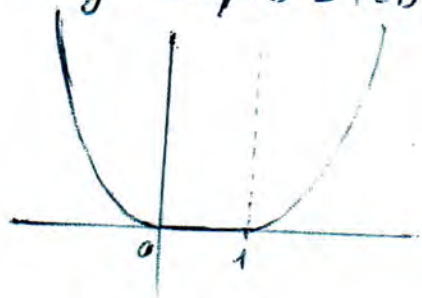
Suite de l'exo 1

3) Pour les mêmes raisons qu'en 1) et 2) g est deux fois dérivable sur $]-\infty,0[\cup]0,a[\cup]a,+\infty[$.

Par ailleurs, en 0 par exemple, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-0}{x}=2\neq 0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}$

Donc g' n'est pas dérivable en 0 et par suite g n'est pas dérivable 2 fois en 0. De m̂ pour a, g n'est pas 2 fois dérivable en a. Conclusion g n'est pas 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$

4) $a=1$ $b=0$ $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } 0\le x\le 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$



5) $a=0 \Rightarrow g(x)=\begin{cases} x^2+b & \text{si } x<0 \\ b & \text{si } x=0 \\ x^2+b & \text{si } x>0 \end{cases} \Rightarrow g(x)=x^2+b \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Ds ce cas g est 1 polynome du 2nd degré à coeff. >0 du plus haut degré $g'(x)=2x$ et $g''(x)=2>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ et par suite g strict. convexe sur $\mathbb{R}$.

6) $a>0 \Rightarrow g(x)=b$ sur $[0,a]$ et $g''(x)=0$ $\forall x\in[0,a]$ alors que sur $]-\infty,0[$ et $]a,+\infty[$ $g''(x)=2$ Donc g est convexe mais ne peut être strict. convexe sur $\mathbb{R}$ puisque $\forall x\in[0,a]$ $g''(x)=0$ $(\exists I\subset\mathbb{R} / \forall x\in I\ g''(x)=0$

7) Lorsque $a>0$ g est strict.-convexe sur $I=]-\infty,0[\cup]a,+\infty[$ puisque $\forall x\in I$ $g''(x)>0$ $(g''(x)=2)$

8) <u>1er cas:</u> $a=0$ $g(x)=x^2+b$ g est strict. convexe et admet un min. unique: $\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=0^2+b=b=g(0) \Rightarrow x^*=0$ min. unique de g sur $\mathbb{R}$

(Confirmation: $g'(x)=2x=0 \Rightarrow x^*=0$ et $g''(x)=2>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$)

<u>2nd cas:</u> $a>0$ * $g(x)=x^2+b$ sur $]-\infty,0]$ et $\min\limits_{]-\infty,0]} g(x)=0^2+b=b=g(0)$

Donc 0 est min. de g sur $]-\infty,0]$

* $g(x)=b$ sur $[0,a] \Rightarrow \min\limits_{[0,a]} g(x)=b=g(x)$ $\forall x\in[0,a]$

Donc $\forall x\in[0,a]$ x min de g sur $[0,a]$.

* $g(x)=(x-a)^2+b$ sur $[a,+\infty[\Rightarrow \min\limits_{[a,+\infty[} g(x)=(a-a)^2+b=g(a)$

Donc a est min de g sur $[a,+\infty[$ $(g'(x)=2(x-a)=0 \Rightarrow x^*=a$ et $g''(x)=2$ $\forall x\in]a,+\infty[$

<u>Concl.</u> Sur $\mathbb{R}=]-\infty,0]\cup[0,a]\cup[a,+\infty[$ $S0=[0,a]$.

Enfin ds les 2 cas ($a=0$ et $a>0$), b est la val. optimale de $\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=g(0)=g(a)=b$

Exo 2

1) $\forall h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ $\langle f'(\overbrace{x_1,x_2}^{x}),\overbrace{(h_1,h_2)}^{h}\rangle = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left[f(x_1+th_1,x_2+th_2)-f(x_1,x_2)\right]$

c.à.d. $\langle f'(x),h\rangle = \lim_{t\to 0^+}\frac{c}{t}\left[(x_1+th_1+x_2+th_2)^2-(x_1+x_2)^2\right]$

$= \lim_{t\to 0^+}\frac{c}{t}\left[(x_1+x_2)^2+t^2(h_1+h_2)^2+2(x_1+x_2)t(h_1+h_2)-(x_1+x_2)^2\right]$

$= 2c(x_1+x_2)(h_1+h_2) = 2c\left[(x_1+x_2)h_1+(x_1+x_2)h_2\right] = \left\langle c\begin{pmatrix}2(x_1+x_2)\\2(x_1+x_2)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right\rangle_2$

2) $f''(x_1,x_2)(h,k) := \langle H'(x_1,x_2),k\rangle$ où $H(x_1,x_2) := \langle f'(x_1,x_2),h\rangle$ $h,k\in\mathbb{R}^2$

Donc $\langle H'(x_1,x_2),(k_1,k_2)\rangle = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left[H(x_1+tk_1,x_2+tk_2)-H(x_1,x_2)\right]$

$= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left[\langle f'(x_1+tk_1,x_2+tk_2),h\rangle-\langle f'(x_1,x_2),h\rangle\right]$ où $h=(h_1,h_2)$

$= \lim_{t\to 0^+}\frac{c}{t}\left[2(x_1+tk_1+x_2+tk_2)(h_1+h_2)-2(x_1+x_2)(h_1+h_2)\right]$

$2c(k_1+k_2)(h_1+h_2) = f''(x_1,x_2)(h,k)$ $\forall h=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}, k=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$

---

3) $f(x_1,x_2)=c(x_1+x_2)^2$ $\Rightarrow \nabla f(x_1,x_2) = 2c(x_1+x_2,\ x_1+x_2)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)^T$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=2c=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} \Rightarrow Hess\, f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2c & 2c\\2c & 2c\end{pmatrix}$

$\det(Hess\, f(x_1,x_2)-\lambda I_2) = \begin{vmatrix}2c-\lambda & 2c\\2c & 2c-\lambda\end{vmatrix} = (2c-\lambda)^2-4c^2 = \lambda^2-4c\lambda+4c^2-4c^2 = \lambda(\lambda-4c)=0 \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1=0\\ \lambda_2=4c>0\end{matrix}$ si $c>0$

λ_1 et $\lambda_2\geq 0 \Rightarrow f$ convexe mais $\lambda_1=0 \Rightarrow f$ n'est pas strict. convexe.

(si $c>0$)