Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2015/2016.

Licence de Mathématiques - Semestre 6.
Module : *Transformations Intégrales* - Examen Final.
Dimanche 22/05/2016 - Durée : 02h.

Exercice 1: (06pts) On considère la fonction $f(t) = \dfrac{\sin \lambda t}{t}$ avec $\lambda > 0$.

1. Montrez que f est de type exponentiel.
2. Calculez $F'(p)$ où $F(p)$ désigne la transformée de Laplace de f.
3. En supposant p réel positif, déterminez $F(p)$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \, \frac{\sin \lambda t}{t} \, dt$$

Exercice 2: (08pts) Résoudre, en utilisant la transformation de Laplace, le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x'(t) = -2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 2x(t) - z(t) \\ z'(t) = -2x(t) + y(t) \\ x(0) = 1 \ , \ y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 3: (06pts) On donne

$$F(p) = \frac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1} \qquad \text{et} \qquad G(p) = \frac{14p^2 + 55p + 51}{2p^3 + 12p^2 + 22p + 12}$$

1. Calculer f l'originale de F, puis représentez graphiquement f.
2. Calculer g l'originale de G.

Licence de Mathématiques – 2015/2016

Module: "Transformations Intégrales" – S6.

Examen Final – Corrigé.

Ex 1: (06pts). $f(t) = \dfrac{\sin \lambda t}{t}$, $\lambda > 0$

1°/ f est de type exponentiel: En effet on a $\left|\dfrac{\sin u}{u}\right| \leq 1, \forall u \in \mathbb{R}$.

Donc $\left|\dfrac{\sin \lambda t}{t}\right| \leq \lambda$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et donc

$$|f(t)| \leq \lambda \Rightarrow e^{-at}|f(t)| \leq \lambda, \forall t \geq 0$$

et $\forall a \geq 0$. Donc f est bien de type exponentiel. (1pt)

2°/ Calcul de $F'(p)$:

$$F'(p) = \frac{d}{dp}\mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}(-t f(t))(p)$$

$$= -\int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \lambda t \, dt = \boxed{-\frac{\lambda}{p^2+\lambda^2}}$$ (1pt)

3°/ Déduction de $F(p)$: Supposons $p \in \mathbb{R}^+$. Alors

$F(p) = -\operatorname{arctg}(p/\lambda) + C$ où C est une constante.

On sait d'autre part que $\lim\limits_{p \to +\infty} F(p) = 0$, donc

$$0 = C - \lim_{p \to +\infty} \operatorname{arctg}(p/\lambda) = C - \pi/2 \Rightarrow C = \pi/2$$

d'où $\boxed{F(p) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p/\lambda)}$ (2pts)

4°/ Déduction de I: On a $I = F(\lambda)$ $(p = \lambda)$

d'où $I = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(1) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \boxed{\pi/4}$ (2pts)

Ex 2: (08 pts) Posons $\begin{cases} X(p) = \mathcal{L}(x)(p) \\ Y(p) = \mathcal{L}(y)(p) \\ Z(p) = \mathcal{L}(z)(p) \end{cases}$

Soit $\mathcal{L}(S)$: $\begin{cases} pX(p) - 1 = -2Y(p) + 2Z(p) \\ pY(p) - 0 = 2X(p) - Z(p) \\ pZ(p) - 0 = -2X(p) + Y(p) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} pX + 2Y - 2Z = 1 & \text{---} (1) \\ -2X + pY + Z = 0 & \text{---} (2) \\ 2X - Y + pZ = 0 & \text{---} (3) \end{cases}$$

2 pts

On peut traiter ce dernier système de plusieurs façons. Une parmi d'autres est la substitution.

$$(2)+(3) \Longrightarrow (p-1)Y + (p+1)Z = 0 \Longrightarrow Y = -\frac{p+1}{p-1}Z$$

En remplaçant dans (2) ou bien (3) on obtient

$$X = -\frac{p^2+1}{2(p-1)}Z$$

En remplaçant X et Y dans (1) on aura:

$$\left(-\frac{p(p^2+1)}{2(p-1)} - \frac{2(p+1)}{p-1} - 2\right)Z = 1 \Longrightarrow \boxed{Z = \frac{-2(p-1)}{p(p^2+9)}}$$

et alors $\boxed{X = \frac{p^2+1}{p(p^2+9)}}$ et $\boxed{Y = \frac{2(p+1)}{p(p^2+9)}}$

3 pts

Après décomposition on obtient:

$$X = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{p} + \frac{8p}{p^2+9}\right] ; \quad Y = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{p} + \frac{18+2p}{p^2+9}\right] ; \quad Z = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{p} - \frac{18+2p}{p^2+9}\right]$$

Soit

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{9}\left[1 + 8\cos 3t\right]H(t) \\ y(t) &= \frac{1}{9}\left[2 + 6\sin 3t - 2\cos 3t\right]H(t) \\ z(t) &= \frac{1}{9}\left[2 - 6\sin 3t - 2\cos 3t\right]H(t) \end{aligned}}$$

3 pts

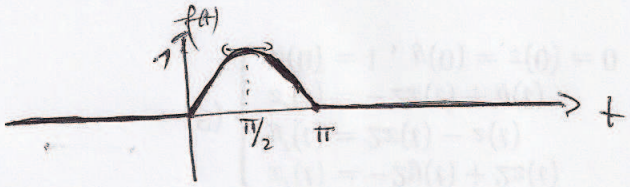
Ex3: (06pts)

1°/ $F(p) = \dfrac{1+e^{-p\pi}}{p^2+1} = \dfrac{1}{p^2+1} + \dfrac{1}{p^2+1} e^{-p\pi}$

Donc $f(t) = (\sin t) H(t) + \sin(t-\pi) H(t-\pi)$

$$\boxed{f(t) = (\sin t)\left[H(t) - H(t-\pi)\right]}$$ 2pts

$$\Rightarrow f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sin t & \text{si } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{si } t > \pi \end{cases}$$



1pt

2°/ $G(p) = \dfrac{14p^2+55p+51}{2p^3+12p^2+22p+12}$.

On remarque que -1 est une racine évidente du dénominateur.

Donc $2p^3+12p^2+22p+12 = (p+1)(2p^2+10p+12)$

$= 2(p+1)(p^2+5p+6)$

$= 2(p+1)(p+3)(p+2)$.

et $G(p) = \dfrac{14p^2+55p+51}{2(p+1)(p+2)(p+3)} = \dfrac{5/2}{p+1} + \dfrac{3/2}{p+2} + \dfrac{3}{p+3}$

ce qui donne

$$\boxed{g(t) = \left[\frac{5}{2} e^{-t} + \frac{3}{2} e^{-2t} + 3 e^{-3t}\right] H(t)}$$ 3pts