Dept. Maths
Faculté des Sciences
Tlemcen

Epreuve finale de géométrie différentielle
Durée 1h30

Exercice1(5 points)

Montrer que l'ensemble $S = \left\{(x, y, z) \in R^3 : xy + xz + 2x + 2y - z = 0\right\}$ *est une sous-variété de* R^3 *au voisinage de* 0*. Donner l'équation du plan tangent à cette sous-variété.*

Correction:

Notons par $f : R^3 \to R$, l'application définie, $f(x, y, z) = xy + xz + 2x + 2y - z$. f est différentiable et sa différentielle est donnée par $Df(x, y, z)$=$(2 + y + z, x + 2, x - 1) = (2, 2 - 1)$+$(y + z, x, x)$. Ce qui montre que si le point (x, y, z) est proche de 0 (dans une boule $B(0, r)$ centrée en $0 = (0, 0, 0)$ et de rayon r assez petit, il en est de même du point $(y + z, x, x)$) par conséquent la différentielle Df ne s'annule pas sur $B(0, r)$. Ce qui montre que f est une submersion dans ce voisinage et donc $S = f^{-1}(\{0\})$ est une sous-variété de R^3 ce voisinage de 0.

Exercice2 (7 points)

Soit $f : R^n \to R$ *un polynôme homogène de degré* $\alpha > 0$ *.*

1) En dérivant $f(\lambda x)$*, montrer que*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x), \forall x \in R^n.$$

2) Montrer que si $t \in R^*$*, alors* $H_t = f^{-1}(t)$ *est une sous-variété de* R^n*.*

Correction

1) Comme f est un polynôme homogène de degré α (cela signifie que $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ pour tout $x \in R^n$) et en dérivant par rapport à λ, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x).$$

Puisque le polynôme dérivé est homogène de dégré $\alpha - 1$, on déduit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x). \tag{1}$$

2) Pour que $H_t = f^{-1}(t)$ soit une sous-variété de R^n, il suffit que la restriction de f à H_t soit une submersion i.e. la différentielle $Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)_{1 \leq i \leq n}$ soit de rang 1 ou encore que $Df(x) \neq 0$, $\forall x \in R^n$. Or s'il existe $x_o \in R^n$ tel que $Df(x_o) = 0$ i.e. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) = 0$, par la relation (1), on déduit que $f(x_o) = 0$ (puique $\alpha \neq 0$). Ce qui montre que $x_o \notin H_t$.

H_t est donc unesous-variété de R^n de dimesion $n-1$ est de classe C^∞.

Exercice3 (8 points)

On considère la 1-forme α définie sur $R^2 - \{0\}$ par

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Soit $\varphi : R^2 \to R^2$, définie par $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a) Calculer $\varphi^*\alpha$.

b) Calculer sur le cercle unité l'intégrale de la forme α.

c) Montrer qu'il n'existe sur $R^2 - \{0\}$ de fonction f de classe C^1 telle que $df = \alpha$.

d) Montrer que $d\alpha = 0$.

Correction

a) Nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi^*\alpha &= \varphi^*\left(\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}\right) = \varphi^*\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)\varphi^*(dy) - \varphi^*\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\varphi^*(dx) \\
&= \frac{xo\varphi}{(xo\varphi)^2 + (yo\varphi)^2} d(yo\varphi) - \frac{yo\varphi}{(xo\varphi)^2 + (yo\varphi)^2} d(xo\varphi)
\end{aligned}$$

et puisque $xo\varphi = r\cos\theta$ et $yo\varphi = r\sin\theta$, alors $d(xo\varphi) = d(r\cos\theta) = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$ et $d(yo\varphi) = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$

$$\begin{aligned}
\varphi^*\alpha &= \frac{r\cos\theta}{r^2}(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) - \frac{r\sin\theta}{r^2}(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \\
&= d\theta.
\end{aligned}$$

b) Notons par S^1 le cercle unité et par γ la restriction de φ à S^1

$$\int_{S^1} \alpha = \int_0^{2\pi} \gamma^*\alpha = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

c) S'il existe sur $R^2 - \{0\}$ une fonction f de classe C^1 telle que $df = \alpha$, alors

$$\int_{S^1} \alpha = \int_{S^1} df = \int_0^{2\pi} df = \int_0^{2\pi} f'(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)\, d\theta = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = 0$$

ce qui contredit (c).

d)

$$\begin{aligned} d\alpha &= d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\wedge dy - d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\wedge dx \\ &= \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}dx\wedge dy - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dy\wedge dx = 0. \end{aligned}$$