Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2015/2016.
Novembre 2015.
Optimisation sans contraintes (L3-S5)

Epreuve de contrôle continu

(durée : 01h 50mn)

Questions sur le cours [**05.5 pts**]

C étant un convexe fermé d'un **R**_espace de Hilbert **E** muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de la norme $\| . \| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$,

On définit,pour $x \in$ **E**, l'unique projection de meilleure approximation de x sur C (notée p(x)) par les deux propriétés équivalentes suivantes : (i) $p(x) \in C$ et $\|x - p(x)\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$ (ii) $p(x) \in C$ et $\langle p(x) - x, p(x) - y \rangle \leq 0 \, \forall y \in C$

1) Montrer que l'opérateur de projection p vérifie la propriété suivante : p o p = p. (**1pt**)
2) Montrer que l'opérateur de projection p est lipschitzien c. à d. $\forall x, y \in E \, \|p(x) - p(y)\| \leq \|x - y\|$. (**1pt**)

Indication : Appliquer successivement (ii) à x et p(y) ($p(y) \in C$) puis à y et p(x) ($p(x) \in C$)

3) On suppose que C est, de plus, un cône dans E (C est un cône convexe fermé de E). Montrer alors que la projection de m.a. d'un pt $x \in E$ sur C vérifie les deux propriétés suivantes :
   3i) $\langle x - p(x), p(x) \rangle = 0$ et 3ii) $\langle x - p(x), y \rangle \leq 0 \, \forall y \in C$ (**2pts**)

Rappel : C est un cône de E ssi, par déf., C vérifie la propriété suivante : $x \in C \Rightarrow \forall \lambda \geq 0 \; \lambda x \in C$. Ceci dit, on rappelle que $0_E \in C$ et C ne peut pas être un sous-ensemble borné de E.

Indication : Utiliser la propriété (ii) de la projection de m.a. pour l'appliquer à des pts particuliers du cône C.

4) C étant toujours un cône convexe fermé de E, montrer alors que l'opérateur de projection de meilleure approximation p de E sur C vérifie les propriétés suivantes :
   a) $\forall x \in E \; \forall \lambda \geq 0 \quad p(\lambda x) = \lambda p(x)$. (**0.5pt**)
   b) $\forall x \in E \; \|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$. (**0.5pt**)
   c) En déduire que $\forall x \in E \; \|x\| \geq \|p(x)\|$. (**0.5pt**)

Indication : $\forall x \in E \; \exists! \, p(x) \in C$ t.q. p(x) projection de m.a. de x sur C et appliquer 3i) et 3ii) à $z = \lambda p(x) \in C$ à la place de $p(\lambda x)$ qui vérifie, bien sûr, 3i) et 3ii) puisque $p(\lambda x)$ est proj. de m.a. de $\lambda x \in E$ sur C.

Exercice 1 [**08 pts**]

Dans **R**, on considère la fonction $f : x \to f(x) = x^4$.

a) Calculer la dérivée directionnelle f '(x) d'ordre 1 de f au pt x ds une direction quelconque $h \in$ **R**. (**1.5pts**)
b) En déduire que f '(x) = $4x^3$. (**0.5pt**)
c) Trouver l'expression de la forme bilinéaire f''(x) représentant la dérivée directionnelle d'ordre 2 de f (c.àd. calculer f ''(x)hk $\forall h, k \in$ **R**). (**1.5pts**)
d) En déduire que f ''(x) = $12x^2$. (**0.5pt**)
e) En utilisant le thm de caractérisation de la convexité d'une fonction sur un convexe ds un esp de Hilbert par la dérivée directionnelle du second ordre (voir *rappel*1 ci-dessous), montrer que f est convexe. (**1pt**)
f) En utilisant la propriété de stricte monotonie de f ' (opérateur de dérivation directionnelle du premier ordre de f, voir *rappel*2 ci-dessous) montrer que f est strictement convexe. (**1.5pts**)
g) Montrer que l'on peut trouver 2 réels x et y t.q. $x \neq y$ et f ''(x) (y-x , y-x) = 0. (**1pt**)
h) Que peut-on en conclure ? (**0.5pt**)

*Rappel*1 : E étant un R-esp. de Hilbert, U ouvert ds E et C convexe inclus ds U, alors si $f : E \to$ **R** est deux fois dérivable (au sens de la dérivée directionnelle) ds U, on a les résultats suivants :

- f est convexe sur C $\Leftrightarrow \forall x, y \in C \;\; f''(x)(y - x, y - x) \geq 0$.
- Si $\forall x, y \in C$ avec $x \neq y$ on a $f''(x)(y - x, y - x) > 0$ alors f est strictement convexe.

Rappel2 : E étant un R-esp. de Hilbert, U ouvert ds E et C convexe inclus ds U, alors si $f : E \to \mathbf{R}$ est une fois dérivable (au sens de la dérivée directionnelle) ds U, on a les résultats suivants :

- f est convexe sur C $\Leftrightarrow \forall x, y \in C \ \langle f'(x) - f'(y), x - y \rangle \geq 0$.
- f est strictement convexe $\Leftrightarrow \forall x, y \in C$ avec $x \neq y \ \langle f'(x) - f'(y), x - y \rangle > 0$.

Exercice 2 [**06.5 pts**]

Dans $\mathbf{R}^2$, on considère la fonction : $f : (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \to f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$

a) Vérifier que $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$. (**0.5pt**)

b) Calculer la dérivée directionnelle d'ordre1 de f au pt (x_1, x_2) ds une direction quelconque $h=(h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2$. C'est-à-dire calculer $\langle f'(x_1, x_2), (h_1, h_2) \rangle_2$ où $\langle .,. \rangle_2$ désigne le produit scalaire ds $\mathbf{R}^2$. (**1.5pts**)

c) Trouver l'expression de la forme bilinéaire $f''(x_1, x_2)$ représentant la dérivée directionnelle d'ordre 2 de f au pt (x_1,x_2) (c.àd. calculer $f''(x_1,x_2)(h,k) \ \forall h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2$). (**1.5pts**)

d) Après avoir calculé la valeur de la forme bilinéaire $f''(x)(y - x, y - x)$ où $x = (x_1,x_2)$ et $y = (y_1,y_2)$ sont deux pts arbitraires de $\mathbf{R}^2$, montrer que f est convexe. (**1pt**)

e) Utilisant la propriété de monotonie de **f '** (deuxième tiret dans *Rappel2* ci-dessus (*Exercice 1*)) montrer que f **n'est pas strictement** convexe. (**1pt**)

f) Calculer la matrice hessienne de f au pt $x = (x_1,x_2)$ de $\mathbf{R}^2$ ($H_{ess}f(x)$) puis ses valeurs propres et confirmer que f est bien convexe sur $\mathbf{R}^2$ mais pas **strictement** convexe. (**1pt**)

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année univ. 2015/2016.
Nov. 2015.
Optimisation sans contraintes

Corrigé de l'épreuve de contrôle continu

Questions de Cours

-1) $x \in E \Rightarrow p(x) \in C$ Montrons alors que $p \circ p = p$ c. à d. $(p \circ p)(x) = p(p(x)) = p(x)$ $\forall x \in E$
Posant alors $z = p(x) \in C$ et montrons d'abord que $\forall y \in C$ $p(y) = y$
$\forall y \in C$ ns avons ds (ii) $\langle p(y) - y, p(y) - y' \rangle \leq 0$ $\forall y' \in C$ et en particulier, puisque $y \in C$ $\langle p(y) - y, p(y) - y \rangle = \|p(y) - y\|^2 \leq 0 \Rightarrow p(y) - y = 0_E \Rightarrow y = p(y)$
De $p(z) = z$ ~~puisque~~ $z = p(x) \in C$ $(x \in E) \Rightarrow p(p(x)) = p(x)$ où x arbitr. ds E
Donc $p \circ p = p$

-2) D'après (ii) $x, y \in E \Rightarrow p(y) \in C \Rightarrow \langle p(x) - x, p(x) - p(y) \rangle \leq 0$. Tjrs d'après (ii) on a $x, y \in E \Rightarrow p(x) \in C \Rightarrow \langle p(y) - y, p(y) - p(x) \rangle \leq 0$. Additionnons alors membre à membre ces 2 inégalités, ns obtenons :

$$0 \geq \langle p(x) - x, p(x) - p(y) \rangle + \langle p(y) - y, p(y) - p(x) \rangle = \langle p(x) - x - p(y) + y, p(x) - p(y) \rangle$$
$$= \langle p(x) - p(y), p(x) - p(y) \rangle - \langle x - y, p(x) - p(y) \rangle = \|p(x) - p(y)\|^2 - \langle x - y, p(x) - p(y) \rangle$$
$$\Rightarrow \|p(x) - p(y)\|^2 \leq \langle x - y, p(x) - p(y) \rangle \leq \|x - y\| \cdot \|p(x) - p(y)\| \Rightarrow \|p(x) - p(y)\| \leq \|x - y\|$$

-3) C étant un cône convexe fermé de E alors $0_E \in C$ et $\lambda y \in C$ $\forall y \in C$ $\forall \lambda \geq 0$
Donc (ii) : $\langle p(x) - x, p(x) - y \rangle \leq 0$ $\forall y \in C \Rightarrow \langle p(x) - x, p(x) \rangle \leq 0$ car $0_E \in C$
et aussi $\langle p(x) - x, p(x) - \underbrace{2p(x)}_{\in C} \rangle = \langle p(x) - x, -p(x) \rangle = -\langle p(x) - x, p(x) \rangle \leq 0$
c.à d $\langle p(x) - x, p(x) \rangle = 0$ (cône $\ni p(x)$ $\forall x \in E$). Par ailleurs (ii) : $\forall y \in C$
$\langle p(x) - x, p(x) - y \rangle \leq 0$ or $\langle p(x) - x, p(x) - y \rangle = \langle p(x) - x, p(x) \rangle - \langle p(x) - x, y \rangle = -\langle p(x) - x, y \rangle \leq 0$ $\forall y \in C$
$\Rightarrow \langle x - p(x), y \rangle \leq 0$ $\forall y \in C$ c'est 3ii).
Ns avons donc 3i) : $\langle x - p(x), p(x) \rangle = 0$ & 3ii) $\langle x - p(x), y \rangle \leq 0$ $\forall y \in C$.

-4) C étant tjrs un cône convexe fermé

a) Soit $x \in E \Rightarrow p(x) \in C \Rightarrow \forall \lambda \geq 0$ $\lambda p(x) \in C$. Posons alors $z = \lambda p(x)$ et montrons que z n'est autre que la proj. de m.a. du pt λx sur C càd. $p(\lambda x) = z \in C$:
$z = p(\lambda x)$ ssi z vérifie 3i) & 3ii) : $\langle \lambda x - z, z \rangle = \langle \lambda x - \lambda p(x), \lambda p(x) \rangle =$
$= \lambda^2 \langle x - p(x), p(x) \rangle = 0$
De plus $\langle \lambda x - z, y \rangle = \langle \lambda x - \lambda p(x), y \rangle = \lambda \langle x - p(x), y \rangle \leq 0$ $\forall y \in C$
Donc z vérifie 3i) et 3ii) $(z \in C) \Rightarrow$ En vertu de l'unicité de la proj. de m.a.
$\forall \lambda \geq 0$ $p(\lambda x) = \lambda p(x) = z$

b) $\|x\|^2 = \|x - p(x) + p(x)\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 + 2\underbrace{\langle x - p(x), p(x) \rangle}_{=0} = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$

c) b) $\Rightarrow \|x\|^2 \geq \|p(x)\|^2 \Rightarrow \|x\| \geq \|p(x)\|$ $\forall x \in E$ puisque $t \mapsto \sqrt{t}$ croissante sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 1

$f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x^4$

a) $$\langle f'(x), h\rangle_{\mathbb{R}} = f'(x)h = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[f(x+th) - f(x)\right] = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left((x+th)^4 - x^4\right)$$
$$= \lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left[(x+th)^2(x+th)^2 - x^4\right] = \lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left[(x^2+t^2h^2+2xth)(x^2+t^2h^2+2xth) - x^4\right]$$
$$= \lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left[\cancel{x^4} + \cancel{x^2t^2h^2} + \underbrace{2x^3th} + \cancel{t^2h^2x^2} + \cancel{t^4h^4} + \cancel{2xt^3h^3} + \underbrace{2x^3th} + \cancel{2xt^3h^3} + \cancel{4x^2t^2h^2} - \cancel{x^4}\right]$$
$$= 2x^3h + 2x^3h = 4x^3h \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

b) $\langle f'(x), h\rangle_{\mathbb{R}} = f'(x)h = 4x^3h \ \forall h \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

c) Posant $g(x) = \langle f'(x), h\rangle_{\mathbb{R}} = f'(x)h$ alors $f''(x)(h,k) = f''(x)hk = \langle g'(x), k\rangle_{\mathbb{R}}$

c.à d. $$f''(x)hk = g'(x)k = \lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left[g(x+tk) - g(x)\right] = \lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left[f'(x+tk)h - f'(x)h\right]$$
$$= \lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left[4(x+tk)^3h - 4x^3h\right] = \lim_{t\to0^+}\frac{4}{t}\left[(x+tk)(x+tk)^2h - x^3h\right]$$
$$= \lim_{t\to0^+}\frac{4h}{t}\left[(x+tk)(x^2+t^2k^2+2xtk) - x^3\right] = \lim_{t\to0^+}\frac{4h}{t}\left[\cancel{x^3} + \cancel{xt^2k^2} + 2x^2tk + x^2tk + \cancel{t^3k^3} + \cancel{2xt^2k^2} - \cancel{x^3}\right]$$
$$= 4h(2x^2k + x^2k) = 12x^2hk \quad \forall h,k \in \mathbb{R}$$

d) $f''(x)hk = 12x^2hk \ \forall h,k \in \mathbb{R} \Rightarrow f''(x) = 12x^2$

e) Si $h = k = x-y$ alors $f''(x)\underbrace{(x-y)^2}_{=(y-x)^2} = 12x^2\underbrace{(x-y)^2}_{=(y-x)^2} \geqslant 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ convexe sur $\mathbb{R}$.

f) Pour m.q. f est strict. convexe il suffit de m.q. f' est strict. monotone

c.à d. $\forall x,y \in \mathbb{R}\ (x \neq y)$ $\langle f'(x) - f'(y), x-y\rangle_{\mathbb{R}} = (f'(x) - f'(y))(x-y) > 0$

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow (f'(x) - f'(y))(x-y) = 4(x^3-y^3)(x-y) = 4(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$$
$$= 4(x-y)^2\left(x^2 + 2x(\tfrac{1}{2}y) + \tfrac{1}{4}y^2 + \tfrac{3}{4}y^2\right)$$
$$= 4(x-y)^2\left[(x+\tfrac{1}{2}y)^2 + \tfrac{3}{4}y^2\right]$$
$$= 4(x-y)^2(x+\tfrac{1}{2}y)^2 + 3(x-y)^2y^2 > 0 \text{ Si } x \neq y$$

Ici on a utilisé l'identité :
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$

Car Si $x = 0 \Rightarrow y \neq 0 \Rightarrow (f'(x)-f'(y))(x-y) = 4y^2(\frac{1}{4}y^2) + 3y^2\cdot y^2 = y^4 + 3y^4 = 4y^4 > 0$

Si $y = 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow (f'(x)-f'(y))(x-y) = 4x^2\cdot x^2 + 3x^2\cdot 0 = 4x^4 > 0$

si $x = -\frac{y}{2} \Rightarrow (x+\frac{1}{2}y)^2 = 0 \Rightarrow (f'(x)-f'(y))(x-y) = \underbrace{3(x-y)^2y^2}_{=\frac{27}{4}y^4} > 0$ car ds ce cas $y \neq 0$ car sinon $x = y = 0$

Dc f est strictement convexe

g) $x = 0$ et $y \neq 0 \Rightarrow f''(x)(y-x)^2 = f''(0)(y-0)^2 = 12 \cdot 0^2 y^2 = 0$

h) On en conclut que ds la proposition : Si $\forall x,y \in C$ avec $x \neq y$ on a $f''(x)(y-x, y-x) > 0$ alors f est strict. convexe, la condition imposée est suffisante mais pas nécessaire pour avoir la stricte convexité de f.

Exercice 2

a) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ car f est 1 polynôme du $2^{\underline{nd}}$ degré à 2 variables $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

b) $\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ $\langle f'(\overbrace{x_1,x_2}^{x}), \overbrace{(h_1,h_2)}^{h} \rangle = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[f(x_1+th_1, x_2+th_2) - f(x_1,x_2)\right]$

c.à.d. $\langle f'(x), h\rangle = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[(x_1+th_1+x_2+th_2)^2 - (x_1+x_2)^2\right]$

$= \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[(x_1+x_2)^2 + t^2(h_1+h_2)^2 + 2(x_1+x_2)t(h_1+h_2) - (x_1+x_2)^2\right]$

$= 2(x_1+x_2)(h_1+h_2) = 2(x_1+x_2)h_1 + 2(x_1+x_2)h_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2) \\ 2(x_1+x_2)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right\rangle_2$

c) $f''(x_1,x_2)(h,k) := \langle H'(x_1,x_2), k\rangle$ où $H(x_1,x_2) := \langle f'(x_1,x_2), h\rangle$ $h, k \in \mathbb{R}^2$.

Donc $\langle H'(x_1,x_2), (k_1,k_2)\rangle = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[H(x_1+tk_1, x_2+tk_2) - H(x_1,x_2)\right]$

$= \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[\langle f'(x_1+tk_1, x_2+tk_2), h\rangle - \langle f'(x_1,x_2), h\rangle\right]$ où $h = (h_1,h_2)$

$= \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[2(x_1+tk_1+x_2+tk_2)(h_1+h_2) - 2(x_1+x_2)(h_1+h_2)\right]$

$= 2(k_1+k_2)(h_1+h_2) = f''(x_1,x_2)(h,k)$ $\forall h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

d) $x = (x_1,x_2)^T$ et $y = (y_1,y_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Ds l'expression de la forme bilinéaire $f''(x_1,x_2)$ en (h,k) on pose $h = k = y - x$

c.à.d. $h_1 = k_1 = y_1 - x_1$ et $h_2 = k_2 = y_2 - x_2$:

$f''(x_1,x_2)(y-x, y-x) = 2(\underbrace{y_1-x_1}_{=k_1} + \underbrace{y_2-x_2}_{=k_2})(\underbrace{y_1-x_1}_{=h_1} + \underbrace{y_2-x_2}_{=h_2}) = 2(y_1-x_1+y_2-x_2)^2 \geq 0$ $\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ convexe sur $\mathbb{R}^2$ c.à.d. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$

e) Utilisant la propriété de monotonie de f' (Voir Rappel 2 ds l'exo. 1):

f strict. convexe sur $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ avec $x \neq y$ $\langle f'(x) - f'(y), x-y\rangle_2 > 0$, on montre alors que f n'est pas strict. convexe sur $\mathbb{R}^2$ c.à.d. on peut trouver 2 pts de $\mathbb{R}^2$: X_0 et Y_0 t.q. $\langle f'(X_0) - f'(Y_0), X_0 - Y_0\rangle_2 = 0$ avec $X_0 \neq Y_0$

En effet $\langle f'(x) - f'(y), x-y\rangle = \langle f'(x), x-y\rangle - \langle f'(y), x-y\rangle$ où $x - y = (x_1-y_1, x_2-y_2)^T$

$= 2(x_1+x_2)(x_1-y_1+x_2-y_2) - 2(y_1+y_2)(x_1-y_1+x_2-y_2)$

$= 2[x_1+x_2-y_1-y_2](x_1-y_1+x_2-y_2) = 2(x_1+x_2-y_1-y_2)^2 \geq 0$

Ce qui confirme que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$ mais pas strict. convexe puisque si $X_0 = (2,3)^T$ et $Y_0 = (3,2)^T$ alors $X_0 = \binom{2}{3} \neq \binom{3}{2} = Y_0$

pourtant $\langle f'(2,3) - f'(3,2), (2,3)^T - (3,2)^T\rangle = 2(2+3-3-2)^2 = 0$

f) $f(x_1,x_2) = (x_1+x_2)^2 \Rightarrow \nabla f(x_1,x_2) = 2(x_1+x_2, x_1+x_2)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)^T$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \Rightarrow \text{Hess} f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2\end{pmatrix}$

$\det(\text{Hess} f(x_1,x_2) - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 4 = \lambda(\lambda-4) = 0 \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 4\end{matrix}$

λ_1 et $\lambda_2 \geq 0 \Rightarrow f$ convexe mais $\lambda_1 = 0 \Rightarrow f$ n'est pas strict. convexe.