Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2015/2016.

Licence de Mathématiques - Semestre 5.
Module : *Introduction à l'Analyse Hilbertienne* - Contrôle continu
Jeudi 03/12/2015 - Durée : 02h.

Exercice 1: (05pts) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $\langle x, y\rangle_\alpha = \langle Ax, y\rangle$ où $\langle .,.\rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$.

1. Pour quelles valeurs du réel α, $\langle .,.\rangle_\alpha$ définit-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?
2. Prenons maintenant $\alpha = 1/2$. Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Représenter graphiquement le vecteur v ainsi que son orthogonal $v^\perp$ et ce, par rapport aux produit scalaire $\langle .,.\rangle_{1/2}$.

Exercice 2: (07pts) On considère $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire habituel

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$$

On donne

$$f(x) = \ln x \qquad \text{et} \qquad g(x) = x \ln x - x$$

1. Calculer $\langle f, f\rangle$, $\langle f, g\rangle$ et $\langle g, g\rangle$.
2. Vérifier que f et g sont linéairement indépendantes.
3. On pose $V = Vect\,\{f, g\}$ et soit $h(x) = 1$. Déterminer $P_V(h)$ la projection orthogonale de h sur V.

Exercice 3: (08pts) Soit $(H, \langle .,.\rangle)$ un espace de Hilbert dans lequel est définie une application linéaire $S : H \to H$ vérifiant:

$$SoS = S \ , \ \langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle \ , \ \|Sx\| \leq \|x\|$$

Montrer que S est la projection orthogonale sur un sous-espace F que l'on déterminera.

Licence de Mathématiques - S5 - 2015/2016.

Module : Introduction à l'Analyse Hilbertienne.

Contrôle Continu - Corrigé.

EX 1 : (05 pts) $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\langle x, y \rangle_\alpha = \langle Ax, y \rangle$, sur $\mathbb{R}^2$.

1°/ $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ est un produit scalaire : On a $\langle x, y \rangle_\alpha = y^T A x$ en écrivant les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ en colonnes. La bilinéarité est évidente et découle de la bilinéarité du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usuel de $\mathbb{R}^2$. La symétrie découle du fait que $A^T = A$. En effet

$$\langle y, x \rangle_\alpha = \langle Ay, x \rangle = x^T A y = (x^T A y)^T \quad \text{car c'est un scalaire}$$

$$= y^T A^T (x^T)^T = y^T A x = \langle Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle_\alpha .$$

La définie-positivité est équivalente à la propriété "définie-positive" de la matrice symétrique A. Or A sera définie positive ssi $\Delta_{11}(A) = 1 > 0$ (clair) et $\Delta_{22}(A) = \det A = 1 - \alpha^2 > 0$.

2 pts

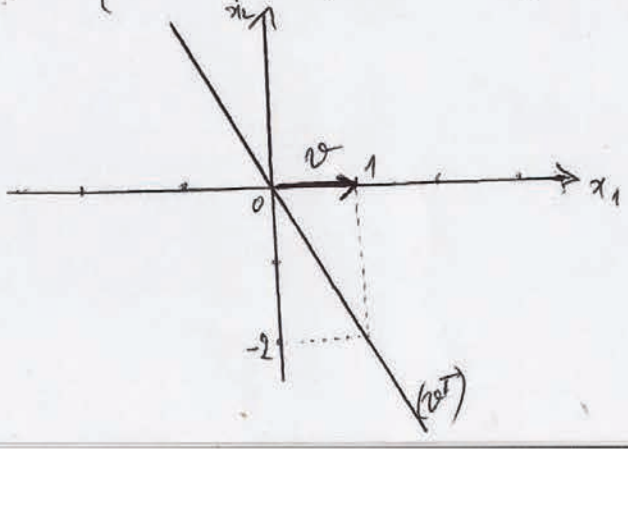
Donc en définitive $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ est un produit scalaire ssi :

$$1 - \alpha^2 > 0 \iff \alpha^2 < 1 \iff \boxed{-1 < \alpha < 1}.$$

2°/ $\alpha = 1/2$: $v^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^2 / \langle x, v \rangle_{1/2} = 0 \}$. Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on aura

$$0 = \langle x, v \rangle_{1/2} = (1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (1, 0) \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2} x_2 \\ \frac{1}{2} x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1 + \frac{1}{2} x_2 .$$

Donc $v^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 + x_2 = 0 \}$



3 pts

Ex 2 : (07 pts) $\langle u,v\rangle = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$; $f(x)=\ln x$; $g(x) = x\ln x - x$.

(Remarquons que $g' = f$).

1°/ Calcul : * $\langle f,f\rangle = \int_0^1 (\ln^2 x)\,dx = \left[\cancel{x \ln^2 x}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \ln x\,dx$

$$= -2\left[x\ln x - x\right]_0^1 = 2 \Rightarrow \boxed{\langle f,f\rangle = 2}$$

(1)

* $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 g'(x)g(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}g^2(x)\right]_0^1$

$$= \frac{1}{2}g^2(1) - \frac{1}{2}g^2(0) = \frac{1}{2} \text{ car } \begin{cases} g(1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\langle f,g\rangle = \frac{1}{2}}$$

(1)

* $\langle g,g\rangle = \int_0^1 g^2(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^2\ln^2 x - 2x^2\ln x + x^2\right)dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{8}{9}x^3\ln x + \frac{17}{27}x^3\right]_0^1 = \frac{17}{27} \Rightarrow \boxed{\langle g,g\rangle = \frac{17}{27}}$$

(1)

2°/ f, g lin. indépendants :

1ère méthode : on calcul le déterminant de Gram

$$G(f,g) = \begin{vmatrix} \langle f,f\rangle & \langle f,g\rangle \\ \langle f,g\rangle & \langle g,g\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{17}{27} \end{vmatrix} = \frac{34}{27} - \frac{1}{4} = \frac{109}{108} \neq 0$$

(2pts)

2ème méthode : On utilise la définition : $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.

$\Leftrightarrow \alpha\ln x + \beta(x\ln x - x) = 0$. Pour $x=1$, on aura $-\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$.

d'où $\alpha \ln x = 0$, on prend par exemple $x = e/4$, $\Rightarrow -\alpha \ln 4 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

3°/ $P_V(h)$: Posons $k = P_V(h)$ alors $k = af + bg$ et $h - k \perp f$ et $\perp g$.

D'où $\langle h - af - bg, f\rangle = \langle h,f\rangle - a\langle f,f\rangle - b\langle g,f\rangle = 0$

et $\langle h - af - bg, g\rangle = \langle h,g\rangle - a\langle f,g\rangle - b\langle g,g\rangle = 0$.

Un simple calcul donne $\langle 1,f\rangle = -1$ et $\langle 1,g\rangle = -3/4$

(2pts)

d'où $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 17/27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{108}{109}\begin{pmatrix} 17/27 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -3/4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a = \frac{-55}{218}$; $b = -\frac{108}{109}$ d'où $\boxed{P_V(h)(x) = \frac{-55}{218}\ln x - \frac{108}{109}(x\ln x - x)}$

Ex3 : (08 pts) $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace de Hilbert.

$S : H \longrightarrow H$ vérifiant :

$S \circ S = S$; $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$ et $\|Sx\| \leq \|x\|, \forall x \in H$.

Si on veut montrer que S est une projection orthogonale, le seul sous-espace vectoriel candidat est $\mathrm{Im}\, S$, car une projection P projette sur $\mathrm{Im}\, P$. 2 pts

Donc : Posons $\boxed{F = \mathrm{Im}\, S}$. Il faut montrer que F est un s/espace vectoriel fermé et que $P_F = S$.

1°/ F s/espace fermé : F s/espace vectoriel, ceci est évident car $F = \mathrm{Im}\, S$ et S est linéaire. Pour la qualité de fermé, on dit :

3 pts Soit (x_n) une suite dans F qui converge vers l. Comme $x_n \in F = \mathrm{Im}\, S$ alors $x_n = S(\xi_n) \overset{S \circ S = S}{\Longrightarrow} S(x_n) = S(\xi_n) = x_n$. Le fait que $\|Sx\| \leq \|x\|$ implique que $S(x_n) \longrightarrow S(l)$, donc l vérifie $l = S(l) \Rightarrow l \in \mathrm{Im}\, S = F$.

2°/ Pour montrer que $P_F = S$ il suffit de montrer que $\forall x \in H$ on a $x - S(x) \perp F$. Soit $y \in F = \mathrm{Im}\, S$ donc $y = S(z)$

3 pts

d'où $\langle x - S(x), y \rangle = \langle x - S(x), S(z) \rangle = \langle x, S(z) \rangle - \langle S(x), S(z) \rangle$

$= \langle x, S(z) \rangle - \langle x, S(S(z)) \rangle$ par la 2ème propriété

$= \langle x, S(z) \rangle - \langle x, S(z) \rangle$ " $S \circ S = S$

$= 0$. cqfd.