Faculté des sciences | **A.U. 2015-2016**
Département de mathématiques | **Durée: 1 h 30 mn**
$2^{ème}$année licence (S4)

Examen de Rattrapage de Géométrie
12 Juin 2016

Exercice 1:

Soient a et b des nombres réels strictement positifs et Γ la partie de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ définie par les équations:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + z^2 - 2xy = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Montrer que Γ est une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$ en la représentant à l'aide d'une paramétrisation régulière (pas forcément par la longueur de l'arc).

Exercice 2:

On considère la courbe paramétrée $\alpha : t \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha(t) = (1+t, -t^3, 1+t^3)$.

1. Montrer que cette représentation est régulière.
2. Donner un syetème d'équations cartésiennes de la droite affine de $\mathbb{R}^3$ tangente à la courbe au point $\alpha(1)$.
3. Donner une équation du plan affine de $\mathbb{R}^3$ normal à la courbe au point $\alpha(1)$.
4. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, calculer la courbure $k(t)$ et la torsion $\tau(t)$ de la courbe α.
5. Que pouvez-vous en déduire?

Exercice 3:

1. Calculer l'opérateur de forme du paraboloïde hyperbolique S d'équation $z = x^2 - y^2$ au point $p = (0, 0, 0)$.
2. En déduire sa courbure de Gauss et ses directions principales.

Barème: **Exercice1:** *04 pts* , **Exercice 2:** *10 pts,* **Exercice 3:** *06 pts*

Rattrapage en Géométrie (2015-2016)
Le corrigé

Exercice 1: (04 pts)
Soit Γ*la partie de l'espace affine* $\mathbb{R}^3$ *définie par les équations:*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + z^2 - 2xy = 1, & a, b > 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Montrer que Γ *est une courbe régulière de* $\mathbb{R}^3$ *en la représentant à l'aide d'une paramétrisation régulière:*
La deuxième équation nous donne $z = -(x+y)$; en reportant dans la première, on obtient

$$\frac{x^2}{\dfrac{a^2}{1+a^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{b^2}{1+b^2}} = 1$$

On pose $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ et $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}$. Ainsi les nouvelles équations qui définissent Γ sont:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \\ z = -x - y \end{cases}$$

Elles montrent que γ est une courbe dans l'espace dont la projection sur le plan d'équation $z = 0$ est une ellipse. On pourra donc prendre comme paramétrage:

$$\gamma(t) = (\alpha \cos t, \beta \sin t, -\alpha \cos t - \beta \sin t)$$

le vecteur tangent est donné par : $\gamma'(t) = (-\alpha \sin t, \beta \cos t, \alpha \sin t - \beta \cos t)$ qui n'est jamais nul car les deux premières composantes ne s'annulent jamais en même temps. C'est donc une représentation régulière.
Exercice 2: (10 pts)

On considère la courbe paramétrée $\alpha : t \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha(t) = (1+t, -t^3, 1+t^3)$.

1. *Montrer que cette représentation est régulière.*

   Dérivons par rapport à t l'application α. On trouve $\alpha'(t) = (1, -3t^2, 3t^2)$. Commme $x'(t) = 1$, ce vecteur $\alpha'(t)$ ne peut pas s'annuler; la représentation est donc régulière.

2. *Donner un syetème d'équations cartésiennes de la droite affine de* $\mathbb{R}^3$ *tangente à la courbe au point* $\alpha(1)$.

   On a $\alpha(1) = (2, -1, 2)$ et $\alpha'(1) = (1, -3, 3)$. Un point $m = (x, y, z)$ est sur la tangente (Δ) à α au point $m_0 = \alpha(1)$ si et seulement si, $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{m_0 m} = \lambda \alpha'(1)$, i.e:

$$\begin{cases} x - 2 = \lambda \\ y + 1 = -3\lambda \\ z - 2 = 3\lambda \end{cases}$$

qui donne le système d'équations cartésiènnes:

$$\begin{cases} 3x - z = 4 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

3. *Donner une équation du plan affine de* $\mathbb{R}^3$ *normal à la courbe au point* $\alpha(1)$.

   Le point $m = (x, y, z)$ est sur le plan affine passant par $m_0 = \alpha(1)$ si et seulement si, $\overrightarrow{m_0 m}.\alpha'(t) = 0$ i.e:

$$(x-2, y+1, z-2).(1, -3, 3) = x - 3y + 3z - 11 = 0$$

   l'équation du plan cherché est donc $x - 3y + 3z = 11$.

4. *Pour chaque* $t \in \mathbb{R}$, *calculer la courbure* $k(t)$ *et la torsion* $\tau(t)$ *de la courbe* α.

   $\alpha'(t) = (1, -3t^2, 3t^2)$ de norme $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 18t^4}$.

   a. Le vecteur tangent $T(t)$: posons

$$v(t) = \sqrt{1 + 18t^4}$$

   on a $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{v(t)}$, ce qui donne $T(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+18t^4}}(1, -3t^2, 3t^2)$.

   b. La courbure $k(t) = \dfrac{\|T'(t)\|}{v(t)}$.

   Or $T'(t) = \dfrac{6}{(1+18t^4)^{\frac{3}{2}}}(-6t^3, -t, t)$, de norme $\|T'(t)\| = \dfrac{6\sqrt{2}t}{(1+18t^4)}$.

   Enfin $k(t) = \dfrac{6\sqrt{2}t}{(1+18t^4)^{\frac{3}{2}}}$

   c. Le vecteur normal: $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \dfrac{(1+18t^4)}{6\sqrt{2}t}\left(\dfrac{6}{(1+18t^4)^{\frac{3}{2}}}(-6t^3, -t, t)\right)$, d'où

   $N(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2(1+18t^4)}(-6t^2, -1, 1)$.

   d. Le vecteur binormal:

$$B(t) = T(t) \wedge N(t) = \frac{\sqrt{2}}{2(1+18t^4)}(0, -1-18t^4, -1-18t^4)$$

   d'où $B(t) = (0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

   e. La torsion: $\tau(t) = -\dfrac{1}{v(t)}(B'(t).N(t))$ et comme $B'(t) = (0, 0, 0)$, alors $\tau(t) = 0$.

5. Q*ue pouvez-vous en déduire?*

   On déduit que α est une courbe planne.

Exercice 3: (06 pts)

1. *Calculer l'opérateur de forme du paraboloïde hyperbolique S d'équation $z = x^2 - y^2$ au point $p = (0,0,0)$.*

   On paramètre la surface S par: $x(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$. l'espace tangent en p est engendré par$(x_u)_p = (1, 0, 2u)_p = (1,0,0)$ et $(x_v)_p = (0, 1, -2v)_p = (0,1,0)$.

   La matrice de la première forme fondamentale dans cette base est

   $$I_p = \begin{pmatrix} E = x_u.x_u & F = x_u.x_v \\ F = x_u.x_v & G = x_v.x_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix}$$

   pour $p = (0,0,0)$, $I_p = Id$.

   La matrice de la seconde forme fondamentale se calcule à l'aide du vecteur normal $N = (x_u \wedge x_v)_p = (0,0,1)$ par $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}.N & \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}.N \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}.N & \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}.N \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

   Comme la matrice de la première forme fondamentale est l'identité, cette dernière matrice est aussi celle de l'opérateur de forme

   $$S_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. *En déduire sa courbure de Gauss et ses directions principales.*

   La courbure de Gauss est donnée par

   $$K = \det S_p = -4$$

   Les deux directions principales sont dirigées par les vecteurs

   $$(x_u)_p = (1,0,0) \text{ et } (x_v)_p = (0,1,0)$$