Université de Tlemcen
Département de mathématiques.

le 13/06/2016.

Epreuve de rattrapage de "Algèbre 4"

Exercice n°1

durée : 2 heures.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique non dégénérée q, f un endomorphisme de E. Montrer que $(\mathrm{Im} f)^{\perp} = \mathrm{Ker} f^*$ et $(\mathrm{Ker} f)^{\perp} = \mathrm{Im} f^*$.

Exercice n°2

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique $\{e\}$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

1°/ Déterminer $M(q)_{e_i}$, $rg(q)$, $sgn(q)$ et $N(q)$.

2°/ Déterminer une base $\{v_i\}$ de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q et $I(q)$.

3°/ Déterminer $M(q)_{v_i}$ et indiquer une autre méthode pour trouver $sgn(q)$.

Exercice n°3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme quadratique q non dégénérée, s sa forme polaire, f un endomorphisme de E et f^* l'adjoint de f relativement à q. Montrer que :

$$\left[s(f(x), f(y)) = s(x,y) \ \forall x,y \in E \right] \Longleftrightarrow f^* \circ f = I_d$$

Exercice n°4

Soit $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par $q(x) = 2x_1x_2$, déterminer $O(q)$.

Exercice n°5

Soit $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^2$ par $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - \alpha(x_1+x_2)^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1°/ Déterminer $A = M(q)_{e_i}$ et les valeurs propres de A

2°/ En déduire une condition sur α pour q soit définie positive.

Ex1 : 4pts Ex2 : 7pts Ex3 : 3pts Ex4 : 2,5pts Ex5 : 3,5pts.

Bon Courage

Corrigé de l'épreuve de rattrapage du module "Algèbre 4" du 13/06/2016

Exercice n° 1

- $\operatorname{Ker} f^* \subset (\operatorname{Im} f)^\perp$

tout d'abord on sait $s(f(x), y) \overset{(1)}{=} s(x, f^*(y))$ $\forall x, y \in E$, f^* étant l'adjoint de f relativement à q et s est la forme polaire de q.

$y \in \operatorname{Ker} f^* \Rightarrow f^*(y) = 0 \Rightarrow s(x, f^*(y)) = 0 \quad \forall x \in E$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} s(\underbrace{f(x)}_{t}, y) = 0 \quad \forall x \in E \Rightarrow s(t, y) = 0 \quad \forall t \in \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow y \in (\operatorname{Im} f)^\perp \Rightarrow \operatorname{Ker} f^* \subset (\operatorname{Im} f)^\perp$

d'autre part $\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim (\operatorname{Im} f)^\perp = \dim \operatorname{Im} f^* + \dim \operatorname{Ker} f^*$.

comme $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^*$ ie $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^*$ on peut conclure que $\dim \operatorname{Ker} f^* = \dim (\operatorname{Im} f)^\perp$

Conclusion : $\left.\begin{array}{l} \operatorname{Ker} f^* \subset (\operatorname{Im} f)^\perp \\ \dim \operatorname{Ker} f^* = \dim (\operatorname{Im} f)^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$

- On vient de montrer que $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$

en utilisant cette propriété pour f^* on aura

$\operatorname{Ker} f^{**} \overset{1}{=} (\operatorname{Im} f^*)^\perp \Rightarrow \operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f^*)^\perp \Rightarrow (\operatorname{Ker} f)^\perp = (\operatorname{Im} f^*)^{\perp\perp}$

$\Rightarrow (\operatorname{Ker} f)^\perp = \operatorname{Im} f^*$ car f est non dégénérée ie $N(q) = \{0\}$

Exercice n° 2

1/ $M(q)_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M(q) = -1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(q) = 3$

$\Rightarrow q$ est non dégénérée $\Rightarrow N(q) = 0$

Gauss $\Rightarrow (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 + \dfrac{x_3^2}{2} - \dfrac{1}{2}(2x_2 + 3x_3)^2$.

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(q) = (2, 1)$.

Posons $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 2x_2 + 3x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' + x_3' \\ x_2 = \frac{1}{2}x_2' - \frac{3}{2}x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q

avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $I(q) = \{x \in \mathbb{R}^2 ;\ x = x_1' v_1 + x_2' v_2 + x_3' v_3 /\ q(x) = 0$

$\Rightarrow I(q) = \{x / x_1'^2 q(v_1) + x_2'^2 q(v_2) + x_3'^2 q(v_3) = $
$= x / x_2'^2 = 2x_1'^2 + x_3'^2$.

3°/ $q(v_1) = 1$, $q(v_2) = -\frac{1}{2}$, $q(v_3) = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow M(q)_{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, on voit que $M(q)_{v_i}$ a 2 valeurs propres positives et une valeur propre négative.

et cela veut dire que $sgn(q) = (2, 1)$.

Exercice n° 3 : Voir cours.

Exercice n° 4

$O(q) = \{ f \in End(\mathbb{R}^2) / f^* \circ f = I_d \} = \{ f \in End(\mathbb{R}^2) / s(f(x), f(y)) = s(x,y)\ \forall x,y \in \mathbb{R}$

$= \{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / {}^t(AX)\, S\, (AY) = {}^tX S Y ;\ \forall X, Y \} = \{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / {}^tASA = S \}$

où s est la forme polaire de q ; $A = M(f)_{e_i}$ et $S = M(s)_{e_i}$ $\{e_i\}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^2$; $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow O(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \begin{pmatrix} 2ac & bc+ad \\ bc+ad & 2bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow O(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \begin{array}{l} 2ac = 0 \\ 2bd = 0 \\ ad + bc = 1 \end{array} \right\}$.

Si $a = 0$ $bc = 1 \Rightarrow b \neq 0$ et $c = \frac{1}{b}$ et $d = 0$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$

Si $b = 0$ $ad = 1 \Rightarrow a \neq 0$ et $d = \frac{1}{a}$ et $c = 0$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$.

conclusion $O(q) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} ; a \neq 0 \right\} \cup \left\{ B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} ; b \neq 0 \right\}$

Exercice n° 5

1/ $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - \alpha (x_1 + x_2)^2 = (1-\alpha) x_1^2 + (1-\alpha) x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2$.

$$\Rightarrow \quad S = M(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P_S(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\alpha-\lambda & -\alpha \\ -\alpha & 1-\alpha-\lambda \end{vmatrix} = (1-\alpha-\lambda)^2 - \alpha^2$$

$$\Rightarrow \quad P_S(\lambda) = (1-\alpha-\lambda-\alpha)(1-\alpha-\lambda+\alpha) = (1-2\alpha-\lambda)(1-\lambda).$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = (1-2\alpha).$$

2/ q est définie positive $\iff sgn(q) = (2,0) \iff \lambda_2 > 0$

$$\iff 1-2\alpha > 0 \iff \alpha < \frac{1}{2}.$$