U. A. B. T. 2015/2016

Département de Mathématiques

Durée: 90 mn

Rattrapage d'analyse numérique 2 (corrigé)

Exercice 1 (6 points)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}, A \in M_3(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^3$ définis par:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ -\alpha & 2\alpha^2 & -\alpha-\alpha^2 \\ 1 & -\alpha-\alpha^2 & 1+\alpha^2+\alpha^4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 1+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

1. Pour $\alpha \neq 0$, résoudre $Ax = b$ par la méthode d'élimination de Gauss.
2. Déduire $\det(A)$ et la factorisation $A = LU$.
3. Si $b' = (b_1, b_2, b_3)^t \in \mathbb{R}^3$, Résoudre $Ax' = b'$ par la factorisation LU de A.
4. En déduire A^{-1}.

Solution

1. On pose $\widetilde{A}^{(1)} = \left[A^{(1)} \vdots b^{(1)}\right]$

$$\widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & \vdots & 1 \\ -\alpha & 2\alpha^2 & -\alpha-\alpha^2 & \vdots & -\alpha \\ 1 & -\alpha-\alpha^2 & 1+\alpha^2+\alpha^4 & \vdots & 1+\alpha^2 \end{pmatrix} \rightarrow \widetilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \alpha^2 & -\alpha^2 & \vdots & 0 \\ 0 & -\alpha^2 & \alpha^2+\alpha^4 & \vdots & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \widetilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \alpha^2 & -\alpha^2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^4 & \vdots & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

La remontée donne: $x = \dfrac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} \alpha^2+\alpha-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\det(A) = \det\left(A^{(3)}\right) = 1 \times \alpha^2 \times \alpha^4 = \alpha^6$.

$A = LU$ *avec*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^4 \end{pmatrix}$$

3. $Ax = b' \Leftrightarrow LUx = b' \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b' \\ Ux = y \end{cases}$

$$Ly = b' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \alpha b_1 + b_2 \\ (\alpha-1)b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \alpha b_1 + b_2 \\ (\alpha-1)b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{\alpha^4} \begin{pmatrix} (2\alpha^4+\alpha^2-2\alpha+1)\, b_1 + (\alpha^3+\alpha-1)\, b_2 + (\alpha-1)\, b_3 \\ (\alpha^3+\alpha-1)\, b_1 + (\alpha^2+1)\, b_2 + b_3 \\ (\alpha-1)\, b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

4. Pour $b' = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad x = \dfrac{1}{\alpha^4}\begin{pmatrix} (2\alpha^4+\alpha^2-2\alpha+1) \\ (\alpha^3+\alpha-1) \\ (\alpha-1) \end{pmatrix}$

Pour $b' = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad x = \dfrac{1}{\alpha^4}\begin{pmatrix} (\alpha^3+\alpha-1) \\ (\alpha^2+1) \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $b' = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad x = \dfrac{1}{\alpha^4}\begin{pmatrix} (\alpha-1) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha^4}\begin{pmatrix} (2\alpha^4+\alpha^2-2\alpha+1) & (\alpha^3+\alpha-1) & (\alpha-1) \\ (\alpha^3+\alpha-1) & (\alpha^2+1) & 1 \\ (\alpha-1) & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (6 points)

Soit le système linéaire $Ax = b$,où $A \in M_3(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^3$ sont donnés par:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

1. Ecrire la méthode itérative de Jacobi sous la forme d'un système itératif (expression des itérés) pour résoudre le système linéaire $Ax = b$.
2. Fournir une condition nécessaire et suffisante (sur les paramètres intervenants dans A) afin que la méthode de Jacobi converge.
3. Ecrire la méthode itérative de Gauss-Seidel sous la forme d'un système itératif (expression des itérés) pour résoudre le système linéaire $Ax = b$.
4. Fournir une condition nécessaire et suffisante (sur les paramètres intervenants dans A) afin que la méthode de Gauss-Seidel converge.

Solution

1. Pour $\alpha \neq 0$, *la méthode de Jacobi appliquée au système donné s'écrit:*

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\gamma x_3^{(k)})/\alpha \\ x_2^{(k+1)} = (2-\beta x_3^{(k)})/\alpha \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ x_3^{(k+1)} = (3-\delta x_2^{(k)})/\alpha \end{cases}$$

2. La condition nécessaire et suffisante de convergence de la méthode de Jacobi est $\rho(B_J) < 1$.

$A = D - L - U$ *avec* $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 \end{pmatrix}$ *et* $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & -\delta & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\alpha}B$$

$\det(B_J - \lambda I) = \det(-\dfrac{1}{\alpha}B - \lambda I) = -\dfrac{1}{\alpha^3}\det(B + \mu I)$ *avec* $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}\mu$.

$\det(B_J - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det(B + \mu I) = 0$

$$\det(B + \mu I) = \begin{vmatrix} \mu & 0 & \gamma \\ 0 & \mu & \beta \\ 0 & \delta & \mu \end{vmatrix} = \mu(\mu^2 - \beta\delta)$$

Les valeurs propres de B *sont:*

$\mu_1 = 0, \mu_2 = \sqrt{\beta\delta}, \mu_3 = -\sqrt{\beta\delta} \qquad$ *si* $\beta\delta \geq 0$

et

$\mu_1 = 0, \mu_2 = i\sqrt{-\beta\delta}, \mu_3 = -i\sqrt{-\beta\delta} \qquad si\ \beta\delta < 0$

On déduit alors les valeurs propre de B_J :

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{\beta\delta}, \lambda_3 = -\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{\beta\delta} \qquad si\ \beta\delta \geq 0$

et

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{-\beta\delta}, \lambda_3 = -i\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{-\beta\delta} \qquad si\ \beta\delta < 0$

Le rayon spectral de B_J *est* $\rho(B_J) = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{|\beta\delta|}$

$\rho(B_J) < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{|\beta\delta|} < 1$

En conclusion, la méthode de Jacobi converge si et seulement si $\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{|\beta\delta|} < 1$ *et* $\alpha \neq 0$.

3. Pour $\alpha \neq 0$, *la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système donné s'écrit:*

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1 - \gamma x_3^{(k)})/\alpha \\ x_2^{(k+1)} = (2 - \beta x_3^{(k)})/\alpha \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ x_3^{(k+1)} = (3 - \delta x_2^{(k+1)})/\alpha \end{cases}$$

2. La condition nécessaire et suffisante de convergence de la méthode de Gauss-Seidel est $\rho(B_{GS}) < 1$.

$A = D - L - U$ *avec* $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 \end{pmatrix}$ *et* $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B_{GS} = (D - L)^{-1}\, U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha}\gamma \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha}\beta \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2}\beta\delta \end{pmatrix}$

$\det(B_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\frac{1}{\alpha}\gamma \\ 0 & -\lambda & -\frac{1}{\alpha}\beta \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2}\beta\delta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\frac{1}{\alpha^2}\beta\delta - \lambda)$

Les valeurs propres de B_{GS} *sont:*

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \frac{1}{\alpha^2}\beta\delta$

Le rayon spectral de B_{GS} *est* $\rho(B_{GS}) = \frac{1}{\alpha^2}|\beta\delta|$

$\rho(B_{GS}) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2}|\beta\delta| < 1$

En conclusion, la méthode de Gauss-Seidel converge si et seulement si $\frac{1}{\alpha^2}|\beta\delta| < 1$ *et* $\alpha \neq 0$.

Exercice 3 (4 points)

On considère la matrice $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon > 0.$

1. Calculer le conditionnement de A_ε pour la norme ∞. Pour quelles valeurs de ε, la matrice A_ε est-elle bien conditionnée? mal conditionnée?

2. Pour $\varepsilon = 2$, utiliser la méthode de Jacobi pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A_2.

Solution

1. $cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$

Or $\|A\|_\infty = 2 + \varepsilon$ *et* $A_\varepsilon^{-1} = \dfrac{1}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow \|A^{-1}\|_\infty = \dfrac{1}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}(2+\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}.$

D'où $cond_\infty(A) = \dfrac{1}{\varepsilon}(2+\varepsilon) = 1 + \dfrac{2}{\varepsilon}.$

Pour $\varepsilon \to 0^+$*,la matrice* A *est mal conditionnée, pour* ε *loin de* 0 *(par exemple pour* $\varepsilon \geq 1$*) la matrice* A *est bien conditionnée.*

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\theta = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow D = R^t A R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$, les vecteurs propres associés sont respectivement

$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (4 points)

Soit f une fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, k-lipschitzienne. On définit l'équation différentielle automone $x'(t) = f(x(t))$ et on lui associe le schéma numérique à un pas suivant:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\phi(x_n, h) \\ \phi(x,h) = \frac{1}{6}f(x) + \frac{2}{3}f(x + \frac{h}{2}f(x)) + \frac{1}{6}f(x + hf(x + hf(x))) \end{cases}$$

i) Vérifier que le schéma est convergent.

ii) Montrer que le schéma est d'ordre supérieur ou égal à 3.

Solution

i) Consistance

$\phi(x, 0) = \frac{1}{6}f(x) + \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f(x) = f(x)$

d'où le schéma est consistant.

Stabilité

$$|\phi(x,h) - \phi(y,h)| \leq \frac{1}{6}|f(x) - f(y)| + \frac{2}{3}\left|f(x + \frac{h}{2}f(x)) - f(y + \frac{h}{2}f(y))\right| + \frac{1}{6}|f(x + hf(x + hf(x))) - f(y + hf(y + hf(y)))|$$

sachant que f est k-lipschitzienne alors,

$$|\phi(x,h) - \phi(y,h)| \leq \frac{1}{6}k|x-y| + \frac{2}{3}k\left|x + \frac{h}{2}f(x) - y - \frac{h}{2}f(y)\right| + \frac{1}{6}k|x + hf(x + hf(x)) - y - hf(y + hf(y))|$$
$$\leq \left(k + \frac{1}{3}hk^2 + \frac{1}{6}hk^2 + \frac{1}{6}h^2k^3\right)|x-y|$$

D'où

$$|\phi(x,h) - \phi(y,h)| \leq \left(k + \frac{1}{2}h^*k^2 + \frac{1}{6}h^{*2}k^3\right)|x-y|, \qquad \forall h \in]0, h^*].$$

La fonction ϕ est alors lipschitzienne par rapport à x et de ce fait le schéma est stable.

Conclusion

Le schéma est consistant et stable il est alors convergent.

ii) Ordre du schéma

Tout d'abord le schéma étant consistant, il est d'ordre supérieur ou égal à 1.

De plus,

$$\frac{\partial\phi}{\partial h}(x,h) = \frac{1}{3}f(x)f'(x + \frac{h}{2}f(x)) + \frac{1}{6}\left[f(x + hf(x)) + hf(x)f'(x + hf(x))\right]f'(x + hf(x + hf(x)))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial h}(x, 0) = \frac{1}{3}f(x)f'(x) + \frac{1}{6}f(x)f'(x) = \frac{1}{2}f(x)f'(x) = \frac{1}{2}f^{[1]}(x).$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial h^2}(x,h) = \frac{1}{6}f^2(x)f''(x + \frac{h}{2}f(x)) + \frac{1}{6}f(x)f'(x + hf(x))f'(x + hf(x + hf(x))) +$$
$$\frac{1}{6}f(x)f'(x + hf(x))f'(x + hf(x + hf(x))) + hf^2(x)f''(x + hf(x))f'(x + hf(x + hf(x))) +$$
$$\frac{1}{6}\left[f(x + hf(x)) + hf(x)f'(x + hf(x))\right]^2 f''(x + hf(x + hf(x))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial h^2}(x,0) = \frac{1}{6}f^2(x)f''(x) + \frac{1}{6}f(x)\left(f'(x)\right)^2 + \frac{1}{6}f(x)\left(f'(x)\right)^2 + \frac{1}{6}f^2(x)f''(x)$$
$$= \frac{1}{3}f^2(x)f''(x) + \frac{1}{3}f(x)\left(f'(x)\right)^2 = \frac{1}{3}f^{[2]}(x)$$

Donc le schéma est au moins d'ordre 3.