Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des sciences
Département de Mathématiques

2015/2016
Probabilités
LMD 2éme année
1h30

Examen en Probabilité

Exercice N°1 (7pts)

I] Soit X une variable aléatoire discrète ne pouvant prendre que les valeurs 3; 4; 5 et 6 :
Déterminez la loi de X sachant que :

$$P(X < 5) = \frac{1}{6} \;,\; P(X > 5) = \frac{1}{2} \;,\; P(X \leq 3) = P(X = 4)$$

Calculer E(X)

II] Soit X une variable aléatoire de loi uniforme U[0, 8]
Quelle est la probabilité que $X^2-3X+2<0$

Exercice N°2 (6pts)

On dit que X suit une loi de Pareto si elle admet pour densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq a \\ k\left(\frac{a}{x}\right)^{b+1} & si \quad x > a \end{cases}$$

1) Déterminer k tel que f soit bien une densité (avec a>0, b>0)
2) Déterminer la fonction de répartition
3) Sous quelles conditions X admet-elle une espérance ?
4) Déterminer selon vous les conditions pour l'existence de tout les moments d'ordre j : $E(X^j)$

Exercice N°3 (7pts)

Soit (X,Y) un couple de v.a.r de densité :

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp -\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)$$

1) Déterminer les lois marginales de X et Y.
2) Déterminer la covariance : cov(X,Y)
3) Déterminer la loi de X+Y

Indication $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2)\; dt = \sqrt{2\pi}$

$2^{\text{ème}}$ année

Solution proposée en Probabilité

2015/2016

Exercice N°1

I] $D_X = \{3, 4, 5, 6\}$

$P(X<5) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(X=3) + P(X=4) = \frac{1}{6}$ (0,5)

$P(X>5) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(X=6) = \frac{1}{2}$ (0,5)

$P(X \leq 3) = P(X=4) \Rightarrow P(X=3) = P(X=4) = \alpha$ (0,5)

donc en résumé, on a :
$$\begin{cases} P(X=3) = P(X=4) = \alpha \\ \alpha + \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{12} \\ P(X=6) = \frac{1}{2} \\ \sum_i P(X=x_i) = 1 \end{cases}$$

$$P(X=5) = 1 - \left(P(X=3) + P(X=4) + P(X=6)\right) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

d' :

x_i	3	4	5	6	Σ
$P(X=x_i)$	1/12	1/12	1/3	1/2	1
$x_i \times P(X=x_i)$	3/12	4/12	5/3	6/2	21/4

(1)

$$E(X) = \sum_i x_i P(X=x_i) = \frac{3}{12} + \dots + \frac{6}{2} = \frac{63}{12} = 5{,}25$$ (1,5)

II] $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,8]}$ donc $f_X(x) = \frac{1}{8} \mathbb{1}_{[0,8]}(x)$

$X^2 - 3X + 2 < 0$ $\quad \Delta = 9 - 8 = 1 \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$

x_i	$-\infty$		1		2		$+\infty$
signe		+	ϕ	−	ϕ	+	

(1) (1)

donc $P(X^2 - 3X + 2 < 0) = P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{8}\, dx = \left[\frac{1}{8} x\right]_1^2$

$$= \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$ (1)

Exercice N°2

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ k\left(\frac{a}{x}\right)^{b+1} & \text{si } x > a \end{cases}$$

1) Déterminer k

f densité $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$ 0,5

$f(x) \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{a} \underbrace{f(x)}_{=0}\,dx} + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{+\infty} k\left(\frac{a}{x}\right)^{b+1} dx$$

$$= k\, a^{b+1} \left[\frac{1}{-b}\, x^{-b}\right]_a^{+\infty}$$ avec $b \neq 0$

$$= k\, a^{b+1}\left[0 + \frac{1}{b}\, a^{-b}\right]$$ de plus $b>0$ (don

$$= k \cdot \frac{a}{b}$$

or $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow k \cdot \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow k = \frac{b}{a}$ 1

d $\boxed{f(x) = b\, a^{b} \cdot x^{-b-1}\, \mathbb{1}_{(x>a)}}$ loi de Pareto

2) Fonction de répartition

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Si $x \leq a$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt = 0$$

Si $x > a$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \cancel{\int_{-\infty}^{a} \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt} + \int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

$$F(x) = \int_a^x b a^b x^{-b-1} dx = b a^b \left[-\frac{1}{b} t^{-b} \right]_a^x \quad \text{or } \underline{\underline{b>0}}$$

$$= b a^b \left[-\frac{1}{b} x^{-b} + \frac{1}{b} a^{-b} \right] = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b$$

$\underline{\text{d}}$ $\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b & \text{si } x > a \end{cases}}$ 0,5 1

2) <u>Esperance</u>

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^{+\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_a^{+\infty} b a^b x^{-b} dx = \begin{cases} b a^b \left[\frac{1}{-b+1} x^{-b+1} \right]_a^{+\infty} & \text{si } b \neq \\ b a^b \left[\ln x \right]_a^{+\infty} & \text{si } b = \end{cases}$$

$$= b a^b \left[0 - \frac{1}{-b+1} a^{-b+1} \right] \quad \text{ssi } b > 1$$

car il faut que $-b+1 \leq$
$\Rightarrow b \geq 1$

dans tt les autre cas l'integrale diverge 0,8

Si $b>1$ alors $\boxed{E(X) = -\frac{ab}{b-1}}$ 1

3) <u>Les moments</u>

$$E(X^j) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^j f(x) dx = \int_a^{+\infty} b a^b x^{-b+j+1} dx$$

$$= \begin{cases} b a^b \left[\frac{1}{-b+j} x^{-b+j} \right]_a^{+\infty} & \text{si } b \neq j \text{ et } -b+j \leq 0 \\ b a^b \left[\ln x \right]_a^{+\infty} & \text{si } b = j \end{cases}$$ 0,8 1

$$= -\frac{b}{b+j} a^j \quad \underline{\underline{\text{ssi } b > j}}$$

Exercice N°4

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \quad e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}$$

1) Déterminer lois de X et Y

$$\begin{cases} f(x,y) = f(y,x) \\ D_X = D_Y = \mathbb{R} \end{cases}$$

donc les resultats pour determiner les lois de X seront les même que pour Y vu la symetri

OR

* On determinera la loi de Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2) = -\frac{2}{3}\left[(x-\tfrac{1}{2}y)^2 - \tfrac{1}{4}y^2 + y^2\right]$$

$$= -\frac{2}{3}(x-\tfrac{1}{2}y)^2 + \frac{1}{2}y^2$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \quad e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)} \quad dx$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2}y)^2} \quad e^{\frac{1}{2}y^2} \quad dx$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2}y)^2\right]} \quad dx$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \quad e^{1/2\, y^2} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}y)\right]^2} \quad dx$$

(1)

On Pose $t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}y)$ $\quad dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} dt$$

1

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y^2} \cdot \sqrt{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$ Or ceci est la densité de la loi de Gauss : Normale centrée reduite

$Y \hookrightarrow N(0,1)$

par analogie $\quad f_X(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad X \hookrightarrow N(0,1)$

2) cov(x,y) $\quad cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

$E(X) = 0$ et $E(Y) = 0$ $\rightarrow$ loi normale centrée 0,5

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)} dx\right) dy$$ 0,5

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-\frac{1}{2}y^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}y)\right]^2} dx\right) dy$$

On Pose $t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}y) \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}y$

$$E(XY) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-1/2 y^2} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} t e^{-t^2/2} dt}_{=0} + \frac{1}{2} y \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt}_{\sqrt{2\pi}} \right]$$ 0,5

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$ $\quad u = y \rightarrow u' = 1$, $\quad v' = y\, e^{-1/2 y^2} \rightarrow v = -e^{-\frac{1}{2}y^2}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[-y\, e^{-1/2 y^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2 y^2} dy \right]$$

$$E(XY) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[0 + \sqrt{2\pi} \right] = \frac{1}{2}$$

d $\quad \operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{2}$

1

Rappel si $T \hookrightarrow N(0,1)$
donc $E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$

3) Loi de X+Y

On Pose $Z = X+Y$

$(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (X,Z) \in \mathbb{R}^2$

0,8

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, z-x)\,dx$$

$$f(x,z-x) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left[-\frac{2}{3}\left(x^2 - x(z-x) + (z-x)^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left[-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}xz - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{3}zx - \frac{2}{3}x^2\right]$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left[-\frac{2}{3}\left[3x^2 + z^2 - 3zx\right]\right]$$

0,4

$$\text{donc } f_Z(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}(3x^2 - 3zx)\right]} dx$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-2/3 z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[4(x^2 - zx)\right]} dx$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-2/3 z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[4(x - \frac{1}{2}z)^2\right]} \cdot e^{+\frac{1}{2}z^2} dx$$

1

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{6}z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2\, t^2} \times \frac{1}{2} dt$$

avec $t = 2(x - \frac{1}{2}z) \Rightarrow dt = 2dx$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} e^{-1/6 z^2} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-1/6 z^2}$$

0,5

$Z \hookrightarrow N(0, \sqrt{3})$