Faculté des sciences
Département de Mathématiques
$2^{\text{ème}}$ année licence (S4)

A.U 2015-2016

Durée : *1 h 30 mn*

Examen Final de Géométrie

26 Mai 2015

Exercice 1 :

Soient F le point $(0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{H}$ le plan d'équation $z = -1$. On pose

$$S = \{M \in \mathbb{R}^3 : distance\ de\ M \text{ à } F = distance\ de\ M \text{ à } \mathcal{H}\}$$

1. Montrer que l'ensemble S est défini par une équation de la forme $z = f(x, y)$ qu'on explicitera.
2. Donner une paramétrisation régulière de S.
3. Calculer, en chaque point $p \in S$, la première forme fondamentale I_p de S.

Exercice 2 :

On considère l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique $\varphi : [0,2\pi[\times]0,\pi[\longrightarrow \mathcal{E}$ de l'ellipsoïde est donnée par : $\begin{cases} x = \cos u \sin v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos v \end{cases}$
2. Calculer l'aire de la surface $\mathcal{E}$.
3. Les courbures principales, en un point p de $\mathcal{E}$, sont-elles strictement positives ?

Exercice 3 :

Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z^2 - x^2 - y^2 = 1\}$.

1. Trouver une paramétrisation de S.
2. Donner l'expression d'un vecteur normal unitaire en tout point.
3. Déterminer les courbures principales, moyenne et de Gauss en tout point de S.
4. Calculer les symboles de Christoffel de la surface paramétrée S.

Barème : Exercice 1: 6*pts* Exercice 2: 7*pts* Exercice 3: 7*pts*

Bon courage

Faculté des sciences **A.U. 2015-2016**
Département de mathématiques
2èmeannée licence (S4)

Examen final de Géométrie
Le Corrigé

Exercice1:
Soient F le point $(0,0,1)$de $\mathbb{R}^3$ et H le plan d'équation $z = -1$.
On pose $S = \{M \in \mathbb{R}^3$ telque : distance de M à F = distansce de M à $H\}$
1. *Montrer que l'ensemble S est défini par une équation de la forme $z = f(x,y)$ qu'on explicitera.*
Soit $M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, la distance de M à F est donnée par: $d_1(M,F) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$, et celle de M à H est définie par: $d_2(M,H) = |z+1|$.
Comme, par hypothèse, $d_1(M,F) = d_2(M,H)$, alors: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = (z+1)^2$. Ce qui donne $z = \frac{1}{4}(x^2+y^2)$. D'où $f(x,y) = \frac{1}{4}(x^2+y^2)$.
2. *Donner une paramétrisation régulière de S.*
On paramètre la surface S par

$$\chi(u,v) = \left(u, v, \frac{1}{4}(u^2+v^2)\right)$$

La différentielle de χ en un point (u,v) de $U \subset \mathbb{R}^2$ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2}u & \frac{1}{2}v \end{pmatrix}$$

donc elle est toujours de rang 2. Cette représentation est donc régulière.
3. *Calculer, en chaque point $p \in S$, la première forme fondamentale I_p de S.*
le plan tangent à S en un point $p \in S$ est engendré par les vecteurs χ_u et χ_v où les dérivées premières du paramétrage sont:

$$\chi_u = \left(1, 0, \frac{1}{2}u\right) \text{ et } \chi_v = \left(0, 1, \frac{1}{2}v\right)$$

.
Dans cette base, les coéfficients de la première forme fondamentale sont donnés par:

$$E = \chi_u{\cdot}\chi_u = 1 + \frac{1}{4}u^2,\ F = \chi_u{\cdot}\chi_v = \frac{1}{4}uv \text{ et } G = \chi_v{\cdot}\chi_v = 1 + \frac{1}{4}v^2$$

d'où, la matrice de la première forme fondamentale est:

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4}u^2 & \frac{1}{4}uv \\ \frac{1}{4}uv & 1 + \frac{1}{4}v^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2:
On considère l'ellipsoïde E d'équation $x^2+y^2+5z^2=1$.
1. *Montrer que* $\varphi(u,v)=(\cos u\sin v,\sin u\sin v,\frac{1}{\sqrt5}\cos v)$ *avec* $(u,v)\in\,]0,2\pi[\times]0,\pi[$ *est une paramétrisation régulière de* E.
On a bien $(\cos u\sin v)^2+(\sin u\sin v)^2+5\left(\frac{1}{\sqrt5}\cos v\right)^2=\sin^2 v+\cos^2 v=1$. De plus, La différentielle de φ en un point (u,v) de $]0,2\pi[\times]0,\pi[$ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} -\sin u\sin v & \cos u\cos v \\ \cos u\sin v & \sin u\cos v \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt5}\sin v \end{pmatrix}$$

donc elle est toujours de rang 2, par exp: $\det\begin{pmatrix} -\sin u\sin v & \cos u\cos v \\ \cos u\sin v & \sin u\cos v\end{pmatrix}\neq 0$. Cette représentation est donc régulière.
2. *Calculer l'aire de la surface* E.
le plan tangent est engendré par les vecteurs φ_u et φ_v où: $\varphi_u=(-\sin u\sin v,\cos u\sin v,0)$ et $\varphi_v=\left(\cos u\cos v,\sin u\cos v,-\dfrac{1}{\sqrt5}\sin v\right)$. Dans cette base, la matrice de la première forme fondamentale est $\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin^2 v & 0\\ 0 & \cos^2 v+\dfrac15\sin^2 v\end{pmatrix}$. L'élément de volume est: $\sqrt{EG-F^2}dudv=\dfrac{1}{\sqrt5}\sin v\sqrt{1+4\cos^2 v}dudv$.
L'aire de l'ellipsoïde est donc

$$\begin{aligned} A[E] &= \int_{v=0}^{\pi}\int_{u=0}^{2\pi}\frac{1}{\sqrt5}\sin v\sqrt{1+4\cos^2 v}dudv \\ &= 2\pi\int_{v=0}^{\pi}\frac{1}{\sqrt5}\sin v\sqrt{1+4\cos^2 v}dv=\frac{2\pi}{\sqrt5}\int_{t=-1}^{1}\sqrt{1+4t^2}dt \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $2t=sh\theta$, on obtient le calcul de primitive

$$\begin{aligned} \int\sqrt{1+4t^2}dt &= \frac12\int\cosh^2\theta\, d\theta=\frac14\int(\cosh(2\theta)+1\ )\,d\theta=\frac14\left(\frac12\sinh(2\theta)+\theta\right) \\ &= \frac14(\sinh\theta\cosh\theta+\theta)=\frac14\left(2t\sqrt{1+4t^2}+\ln\left(2t+\sqrt{1+4t^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, l'aire de E est: $A[E]=\dfrac{\pi}{\sqrt5}\left(2\sqrt5+\ln\left(2+\sqrt5\right)\right)=\pi\left(2+\dfrac{\ln\left(2+\sqrt5\right)}{\sqrt5}\right)$
3. *Les courbures principales en un point* p *de* E *sont-elles strictement positives?*
Soit $p=\varphi(u,v)$ un point de la surface, le plan tangent au point p est engendré par $\{\varphi_u,\varphi_v\}$
$\varphi_u\wedge\varphi_v=\left(-\dfrac{1}{\sqrt5}\cos u\sin^2 v,-\dfrac{1}{\sqrt5}\sin u\sin^2 v,-\sin v\cos v\right)$ de norme $\|x_u\wedge x_v\|=\dfrac{1}{\sqrt5}\sin v\sqrt{1+4\cos^2 v}$.
On obtient le vecteur normal $N(u,v)=\dfrac{\varphi_u\wedge\varphi_v}{\|\varphi_u\wedge\varphi_v\|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 v}}\left(-\cos u\sin v,-\sin u\sin v,-\sqrt5\cos v\right)$.

La 2ème forme fondamentale II_p est définie par la matrice symétrique $\begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix}$.
Où $l = N.(\varphi_u)_u$, $m = N.\varphi_{uv}$ et $q = N.\varphi_{vv}$. On calcule $(\varphi_u)_u = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, 0)$, $\varphi_{uv} = (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0)$ et $\varphi_{vv} = \left(-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, -\frac{1}{\sqrt{5}} \cos v\right)$.
D'où $l = \frac{\sin^2 v}{\sqrt{1+4\cos^2 v}}$, $m = 0$ et $q = \frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 v}}$.
Et maitenant, l'opérateur de forme S_p a pour matrice

$$\begin{aligned} I_p^{-1} II_p &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2 v} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4\cos^2 v + 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sin^2 v}{\sqrt{1+4\cos^2 v}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 v}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 v}} & 0 \\ 0 & \frac{5}{(4\cos^2 v + 1)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent, les courbures principales sont

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 v}} > 0 \text{ et } k_2 = \frac{5}{(4\cos^2 v + 1)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

Exercice 3.
Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 - x^2 - y^2 = 1\}$.
1. *Trouver une paramétrisation de S.*
On paramètre la surface S par $x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par: $x(u,v) = (shu \cos v, shu \sin v, chu)$.
2. *Donner l'expression d'un vecteur normal unitaire en tout point.*
Soit $p = x(u,v)$ un point de la surface, le plan tangent au point p est engendré par $\{x_u, x_v\}$ où $x_u = (chu \cos v, chu \sin v, shu)$ et $x_v = (-shu \sin v, shu \cos v, 0)$.
Donc $x_u \wedge x_v = (-sh^2 u \cos v, -sh^2 u \sin v, chushu)$ de norme $\|x_u \wedge x_v\| = shu\sqrt{ch2u}$. On obtient le vecteur normal

$$N(u,v) = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{1}{\sqrt{ch2u}}(-shu \cos v, -shu \sin v, chu)$$

3. *Déterminer les courbures principales, moyenne et de Gauss en tout point de S.*
les coéfficients de la première forme fondamentale sont donnés par:

$$E = x_u.x_u = ch2u,\ F = x_u.x_v = 0 \text{ et } G = x_v.x_v = sh^2 u$$

d'où, la matrice de la première forme fondamentale est: $I_p = \begin{pmatrix} ch2u & 0 \\ 0 & sh^2 u \end{pmatrix}$.
On calcule

$$(x_u)_u = (shu \cos v, shu \sin v, chu),\ x_{uv} = (-chu \sin v, chu \cos v, 0) \text{ et } x_{vv} = (-shu \cos v, -shu \sin v, 0)$$

d'où l'on tire les coéfficients de la deuxième forme fondamentale: $l = \frac{1}{\sqrt{ch2u}}$, $m = 0$ et $q = \frac{sh^2 u}{\sqrt{ch2u}}$, Donc, la matrice de la deuxième forme fondamentale est: $II_p = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{ch2u}} & 0 \\ 0 & \dfrac{sh^2u}{\sqrt{ch2u}} \end{pmatrix}$

L'opérateur de forme S_p a pour matrice

$$\begin{aligned} I_p^{-1}II_p &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{ch2u} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{sh^2u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{ch2u}} & 0 \\ 0 & \dfrac{sh^2u}{\sqrt{ch2u}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(ch2u)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{ch2u}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent, les courbures principales sont $k_1 = \dfrac{1}{(ch2u)^{\frac{3}{2}}}$ et $k_2 = \dfrac{1}{\sqrt{ch2u}}$.

Le calcul de la courbure de Gauss K est immédiat, $K = k_1.k_2 = \dfrac{1}{(ch2u)^2}$

La courbure moyenne H est: $H = -\dfrac{1}{2}(k_1 + k_2) = \dfrac{ch^2u}{(ch2u)^{\frac{3}{2}}}$.

4. *Calculer les symboles de Christoffel de la surfacesparamétrée S.*
Soit S la surface paramétrée par $x(u,v) = (shu\cos v, shu\sin v, chu)$.

- Les dérivées premières du paramétrage:

$$x_u = (chu\cos v, chu\sin v, shu)\, et x_v = (-shu\sin v, shu\cos v, 0)$$

- Les symboles de Christoffel: On a $E_u = 2sh2u, E_v = F_u = F_v = G_v = 0$ et $G_u = sh2u$, donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma^u_{\mathrm{u}} \\ \Gamma^v_{\mathrm{u}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{ch2u} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{sh^2u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sh2u \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{ch2u} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{sh^2u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2}sh2u \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{ch2u} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{sh^2u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2}sh2u \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne $\begin{pmatrix} \Gamma^u_{\mathrm{u}} \\ \Gamma^v_{\mathrm{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{sh2u}{ch2u} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{chu}{shu} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{sh2u}{2ch2u} \\ 0 \end{pmatrix}$.