Dept. Mathématique
Faculté des Sciences
Tlemcen

Epreuve finale d'analyse complexe
durée 1h30

Exercice1 (4 points)

a) Déterminer les séries de Taylor à l'origine de $\frac{1}{1-z}$ et $\frac{1}{(1-z)^2}$.

Exercice2 (6 points)

Soient $R > 1$ un réel et f une fonction holomorphe dans le disque ouvert de centre O et rayon R.

A l'aide des intégrales $\int_{|z|=1} \left[2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right] \frac{f(z)}{z} dz$, montrer que l'on a

$$\frac{2}{\pi} \int_{|z|=1} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta = 2f(0) + f'(0)$$

et

$$\frac{2}{\pi} \int_{|z|=1} f(e^{i\theta}) \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = 2f(0) - f'(0).$$

Exercice3 (4points)

Soient f et g deux fonctions holomorphes en z_o et $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$. On suppose que g admet un zéro simple en z_o,

calculer $Rés(h, z_o)$.

Exercice4 (6 points)

Calculer par la méthode des résidus l'intégrale suivante

$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^n} dx$ où p est entier tel que $1 < p < n - 1$.

Correction

Exercice1

Les séries de Taylor des fonctions $\frac{1}{1-z}$ et $\frac{1}{(1-z)^2}$ sont données dans le disque unité ouvert $|z| < 1$ respectivement par

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

et

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k.$$

La deuxième s'obtient en remarquant que $\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$.

Exercice2

Pour montrer les formules de l'exercice2, on calcule differemment les premiers membres:

puisque z est sur le cercle unité centré en 0 alors $z = e^{i\theta}$, avec $0 \leq \theta < 2\pi$ d'où $dz = ie^{i\theta}d\theta$ et

$$\int_{|z|=1} \left[2 + z + \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz = i \int_0^{2\pi} \left[2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right] f(e^{i\theta}) d\theta$$

et en tenant compte de $2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2(1 + \cos\theta) = 4\cos^2 \frac{\theta}{2}$, on obtient

$$\int_{|z|=1} \left[2 + z + \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz = 4i \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2}\ d\theta \tag{1}$$

De même en remarquant que $2 - \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = 4\sin^2 \frac{\theta}{2}$, on obtient

$$\int_{|z|=1} \left[2 - \left(z + \frac{1}{z}\right)\right] \frac{f(z)}{z} dz = 4i \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2 \frac{\theta}{2}\ d\theta. \tag{2}$$

Si on pose $g(z) = \left[2 + z + \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz$, on voit que 0 est un pôle double pour la fonction g et alors

$$R\acute{e}s(g, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 g(z)\right) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(\left(2z + z^2 + 1\right) f(z)\right)$$
$$= \lim_{z \to 0} \left((2 + 2z) f(z) + \left(2z + z^2 + 1\right) f'(z)\right) = 2f(0) + f'(0)$$

et par le théorème des résidus

$$\int_{|z|=1} \left[2 + z + \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i \left(2f(0) + f'(0)\right). \tag{3}$$

Par comparaison de (1) et (3), on a la formule cherchée

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2}\ d\theta = 2f(0) + f'(0).$$

La deuxième formule s'obtient de la même manière.

Exercice3

Puisque les fonctions f et g sont holomorphes en z_o et z_o est un zéro simple de la fonction g, z_o est un pôle simple pour la fonction $h = \frac{f}{g}$ et le résidu de h en z_o est donné par

$$R\acute{e}s(h, z_o) = \lim_{z \to z_o} (z - z_o)\, h(z) = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z)}{\frac{g(z)}{z - z_o}} = \frac{f(z_o)}{\lim_{z \to z_o} \frac{g(z) - g(z_o)}{z - z_o}} = \frac{f(z_o)}{g'(z_o)}.$$

Exercice4

On applique le théorème des résidus à la fonction de la variable complexe $f(z) = \frac{z^p}{1+z^n}$. Pour cela on cherche les singularités de f qui sont solutions de l'équation

$$1 + z^n = 0$$

cela revient à résoudre

$$e^{in\theta} = -1 = e^{i\pi}$$

i.e.

$$\theta_k = \frac{\pi}{n} + \frac{k2\pi}{n},\ k \in \{0, 1, ..., n-1\}\,.$$

et les solutions sont alors

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{k2\pi}{n}\right)},\ \ k \in \{0, 1, ..., n-1\}\,.$$

Ces singularités sont toutes simples pour s'en convaincre il suffit de voir qu'elles ne sont des zéros des dérivées. Maintenant pour calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^n}dx$, on calcul d'abord $\int_0^A \frac{x^p}{1+x^n}dx$. On commence par calculer l'intégrale de $f(z) = \frac{z^p}{1+z^n}$ sur le contour C constitué du segment $[0, A]$ (pour $A > 0$ assez grand) de l'arc de cercle $z(t) = Ae^{it}$, $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$ et du segement $z(t) = te^{i\frac{2\pi}{n}}$, $t \in [A, 0]$. Comme ce contour contient seulement la singularité $\mathrm{z}_o = e^{i\frac{\pi}{n}}$ le théorème des residu nous donne

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i R\acute{e}s(f, e^{i\frac{\pi}{n}}).$$

Nous avons pour le second membre

$$R\acute{e}s(f, z_o = e^{i\frac{\pi}{n}}) = \lim_{z\to z_o}(z - z_o)f(z) = \frac{z_o^p}{\lim_{z\to z_o}\frac{1+z^n}{z-z_o}} = \frac{z_o^p}{nz_o^{n-1}} = -\frac{e^{i\frac{\pi}{n}(p+1)}}{n}. \tag{4}$$

Qand au premier membre il s'écrit

$$\int_C f(z)dz = \int_0^A \frac{x^p}{1+x^n}dx + i\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{A^{p+1}e^{i(p+1)x}}{1+A^ne^{inx}}dx - \int_0^A \frac{x^pe^{i(p+1)\frac{2\pi}{n}}}{1+x^n}dx$$

$$= (1 - e^{i(p+1)\frac{2\pi}{n}})\int_0^A \frac{x^p}{1+x^n}dx + i\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{A^{p+1}e^{i(p+1)}}{1+A^ne^{inx}}dx.$$

En remarquant que (pour A assez grand)

$$\left|\frac{A^{p+1}e^{i(p+1)}}{1+A^ne^{inx}}\right| \leq \frac{A^{p+1}}{A^n-1}$$

et puisque p+1<n alors $\lim_{A\to\infty}\left|\frac{A^{p+1}e^{i(p+1)}}{1+A^n e^{inx}}\right| = 0$ (uniformément) :

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{A^{p+1}e^{i(p+1)x}}{1+A^n e^{inx}}dx = 0.$$

En tenant compte de (4), on obtient

$$\begin{aligned}
(1-e^{i(p+1)\frac{2\pi}{n}})\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^n}dx &= -2\pi i\frac{e^{i\frac{\pi}{n}(p+1)}}{n(1-e^{i(p+1)\frac{2\pi}{n}})} \\
\text{i.e.}\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^n}dx &= -\frac{2\pi i}{n}\frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{n}(p+1)}-e^{i(p+1)\frac{2\pi}{n}}} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin{(p+1)}\frac{\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

Remarque: Concernant la méthode et le choix du contour, nous avions traité dans le cours $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}dx$.