Université de Tlemcen 29/05/2016
Département de Mathématiques
L2 Math

Epreuve Finale d' Analyse IV (durée 02h)

Exercice 1 : 07 points

Soit $F: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *telle que* $F = (f_1, f_2)$ avec

$$\begin{cases} f_1(x,y,z,u,v) = 2x^2 e^{uz} + 3v(1 + y + 5x^2y^3) + z^2 \\ f_2(x,y,z,u,v) = e^{-u}\left(x^2 + sin(x^6y^3)\right) - vy - z \end{cases}$$

On considère le système (S) d'équations : $F(x,y,z,u,v) = (0,0)$

1. Montrer que l'on peut résoudre le système(S) par rapport à (u,v)en fonction de x,y,z dans un voisinage du point $(1,0,1,0,-1)$.
2. On pose $(u,v) = \phi(x,y,z)$,montrer que ϕ est de classe C^1 et calculer sa matrice jacobienne Au point$(1,0,1)$.
3. Soit φ: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *telle que* $\varphi = (2x^2 - 3(1 + y + 5x^2y^3)\,,\ x^2 + sin(x^6y^3) + y\,)$.

Montrer que φ est un C^1 - difféomorphisme local au voisinage du point $(1,0)$, en déduire qu'il existe $r > 0$ *tel que* le système : $\begin{cases} 2x^2 - 3(y + 5x^2y^3) = \alpha \\ x^2 + sin(x^6y^3) + y = \beta \end{cases}$

admet une solution unique $\forall(\alpha,\beta) \in D\left((2,1), r\right)$.

4. Est-ce que φ est un C^1 – difféomorphisme local dans $\mathbb{R}^2$? est-il un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ *dans* $\varphi(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 2 : 05 points

On donne pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{t}^{\mathrm{x}-1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathrm{dt}$ et $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

1. Déterminer les domaines de définition de $\beta(x,y)$ et *de* $\Gamma(x)$.
2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos\theta)^{2x-1}(sin\theta)^{2y-1}d\theta$ pour $x > 0$ *et* $y > 0$.
3. Vérifier que $\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{u}^{2\mathrm{x}-1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{u}^2}\mathrm{du}$ et écrire $\Gamma(x)\,\Gamma(y)$sous forme d'une intégrale double.
4. Etablir que $\Gamma(x)\,\Gamma(y) = \lim_{\mathrm{R}\rightarrow+\infty} \iint_{\mathrm{D_R}} f(u,v)dudv$ où $\mathrm{D_R} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq R^2 \}$ en déduire que $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Exercice 3: 08 points

1. Soit $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$, calculer l'intégrale double :

$$I = \iint_D \sqrt{1 - (x^2 + y^2)u^2}\ \ dxdy \text{ pour } \boldsymbol{u} = \sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2}} \text{ puis } \boldsymbol{u} = \sqrt{\boldsymbol{2 - x^2 - y^2}}.$$

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le corps U limité inférieurement par la surface S_1 du cône d'équation : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et supérieurement par la surface S_2 de l'hémisphère d'équation: $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

2. Calculer $\oiint_{S^+} dydz + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)z^2}\ \ dxdy$ où S^+est la face extérieure de la surface fermée limitant le domaine U. Retrouver le résultat en appliquant la formule d'Ostrogradski-Gauss.
3. Soit C le cercle formé par l'intersection $S_1 \cap S_2$.
   Calculer $\oint_{C^+}(y - x - z)\, dx + (2x + z^2)dy + y^3xz\, dz$ le long de C parcouru dans le sens positif, retrouver le résultat en appliquant la formule de Stokes.

$(On\ donne\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ )$

Bon courage !

Corrigé de l'épreuve finale d' Analyse IV

Exercice 1 : 07 points

$$F(x,y,z,u,v)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases} f_1(x,y,z,u,v)=2x^2e^{uz}+3v(1+y+5x^2y^3)+z^2=0\\ f_2(x,y,z,u,v)=\quad e^{-u}\big(x^2+sin(x^6y^3)\big)-vy-z=0\end{cases}$$

On pose X $=(x,y,z)$ et Y=(u,v). $F(x,y,z,u,v)=F(X,Y)$.

1. On applique le T.F.I à la fonction F au voisinage du point $(1,0,1,0,-1)$:
   - $F(1,0,1,0,-1)=(0,0)$
   - F est de classe C^1 car ses deux composantes sont de classe C^1.
   - Det$\big(J_YF(1,0,1,0,-1)\big)$=$\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3\neq 0$

   D'après le T.F.I on peut résoudre le système par rapport à Y.
2. D'après 1, $\exists V$ *un voisinage ouvert du* point$(1,0,1)$, W *un voisinage ouvert du* point$(0,1)$ et $\phi: V\to W$ de classe C^1 telle que $F\big(X,\phi(X)\big)=(0,0)\ \forall X\in V$,
   $(u,v)=\phi(x,y,z)$ et $\phi(1,0,1)=(0,1)$
   $J_X\,\phi(1,0,1)=-\big(J_YF(1,0,1,0,-1)\big)^{-1}.\ J_XF(1,0,1,0,-1)$
   $$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6 & -3 & 3\\ 6 & -1 & 0\end{pmatrix}$$
3. $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *telle que* $\varphi=\big(2x^2-3(1+y+5x^2y^3)\,,\ x^2+sin(x^6y^3)+y\big)$.

- φ est de classe C^1 car ses deux composantes sont de classe C^1.
- $\det(J\varphi(1,0))=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=10\neq 0$

4. Alors φ' est inversible et de de classe C^1 ,ainsi c'est un C^1 - difféomorphisme local au voisinage du point $(1,0)$ ie $\exists V$ *un voisinage ouvert du* point$(1,0)$ et $W=D\big((-1,1),r\big)(r>0)$*un voisinage ouvert du* point$(-1,1)$ tels que :
   $\phi: V\to W$ est une bijection
   $$\begin{cases}2x^2-3(y+5x^2y^3)=\alpha\\ x^2+sin(x^6y^3)+y=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\varphi(x,y)=(\alpha-3,\beta)\ \ ....\quad (*)$$
   L'équation $(*)$admet une solution unique dans V, *si* $(\alpha-3,\beta)\in W$.
   ie : $(\alpha-3+1)^2+(\beta-1)^2<r^2$ ou bien $(\alpha,\beta)\in D\big((2,1),r\big)$
5. φ n'est pas un difféomorphisme local dans $\mathbb{R}^2$ *car il ne l'est pas pour* les points $(0,y)\ \forall y\in\mathbb{R}$, en effet $\det(J\varphi(0,y))=0$. On déduit aussi qu'il n'est pas un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ *dans* $\varphi(\mathbb{R}^2)$.
   (On remarquera aussi que φn'est pas injective $\varphi(-x,y)=\varphi(x,y)$ alors ce n'est un difféomorphisme global).

Exercice 2 : 05 points

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}f(t)\,dt\quad\text{et}\ \beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_0^1 g(t)dt$$

5. $\Gamma(x)=\underbrace{\int_0^1 f(t)\,dt}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}f(t)\,dt}_{I_2}$ et $\beta(x,y)=\underbrace{\int_0^{\frac12}g(t)\,dt}_{I_1}+\underbrace{\int_{\frac12}^1 g(t)\,dt}_{I_2}$

   - Domaine de définition *de* $\Gamma(x)$
   $$\begin{cases} f(t)\overset{v(0)}{\approx}\dfrac{1}{t^{1-x}}\ ,\mathit{alors}\ I_1\text{cvge si x}>0\ \mathit{sinon\ il\ dvge}\ .\\ \lim\limits_{t\to+\infty}t^2f(t)=0,\quad \mathit{alors}\quad I_2\text{cvge}\ \forall\ x\in R.\end{cases}$$

   Alors $\Gamma(x)$ est définie $\forall x>0$.

   - Domaine de définition *de* $\beta(x,y)$:
   $$\begin{cases} g(t)\overset{v(0)}{\approx}\dfrac{1}{t^{1-x}}\ ,\mathit{alors}\ I_1\text{cvge si x}>0\ \mathit{sinon\ il\ dvge}\ .\\ g(t)\overset{v(1)}{\approx}\dfrac{1}{(1-t)^{1-y}}\ ,\mathit{alors}\ I_2\text{cvge si y}>0\ \mathit{sinon\ il\ dvge}\end{cases}$$

   Alors $\beta(x,y)$ est définie $\forall(x,y)$: $x>0$ *et* $y>0$.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos\theta)^{2x-1}(sin\theta)^{2y-1}d\theta \overset{u=sin^2\theta}{\cong} \frac{1}{2}\int_0^1(1-u)^{x-1}u^{y-1}du=\frac{1}{2}\beta(x,y)$.

7. $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}dt \overset{t=u^2}{\cong} 2\int_0^{+\infty} u^{2x-1}\,e^{-u^2}du$

$\Gamma(x)\,\Gamma(y)=4\int_0^{+\infty} u^{2x-1}\,e^{-u^2}du\int_0^{+\infty} v^{2y-1}\,e^{-v^2}dv=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} u^{2x-1}\,v^{2y-1}e^{-(u^2+v^2)}dudv$

4. $\Gamma(x)\,\Gamma(y)=\ \lim_{R\to+\infty}4\iint_{D_R} u^{2x-1}v^{2y-1}e^{-(u^2+v^2)}dudv$ où

$D_R=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: u^2+v^2\le R^2\ \}$

$\Gamma(x)\,\Gamma(y)=\lim_{R\to+\infty}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos\theta)^{2x-1}(sin\theta)^{2y-1}\,d\theta\int_0^R\ r^{2x+2y-1}e^{-r^2}\,dr$

$=\ \beta(x,y)2.\int_0^{+\infty} r^{2(x+y)-1}\,e^{-r^2}dr=\beta(x,y).\Gamma(x+y)$

on déduit que $\beta(x,y)\ =\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

<u>**Exercice 3:**</u> 08 points

1.

- $\boldsymbol{u=\sqrt{x^2+y^2}}$, $I_1=\iint_D\ \sqrt{1-(x^2+y^2)^2}\ \ dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^4)^{\frac{1}{2}}rdr=$

  $=\frac{\pi}{2}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}du=\ \frac{\pi}{2}\beta(\frac{1}{2},\frac{3}{2})=\frac{\pi^2}{4}$.

- $\boldsymbol{u=\sqrt{2-x^2-y^2}}$, $I_2=\iint_D\ \ \sqrt{1-(x^2+y^2)(2-x^2-y^2)}\ \ dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\frac{\pi}{2}$

2. On pose $P(x,y,z)=1\quad R(x,y,z)=\sqrt{1-(x^2+y^2)z^2}$

- $J=\oiint_{S+}dydz+Rdxdy=\iint_S\ (cos\alpha+R\,cos\gamma)ds\ =\iint_{S_1}(cos\alpha+Rcos\gamma)ds\ +\iint_{S_2}(cos\alpha'+Rcos\gamma')ds.$

  Soit $\vec{n}_1(cos\alpha,cos\beta,cos\gamma)$, $\vec{n}_2(cos\alpha',cos\beta',cos\gamma')$ les vecteurs normaux respectifs aux surfaces S_1 et S_2.

  $$\begin{cases} S_1: z-\sqrt{x^2+y^2}=0\ , ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy,\ cos\alpha=\frac{x}{z\sqrt{2}}\ \ cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ S_2: z-\sqrt{2-x^2-y^2}=0, ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}dxdy=\frac{\sqrt{2}}{z}dxdy,\ cos\alpha'=\frac{x}{\sqrt{2}}, cos\gamma'=\frac{z}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

  La projection de chacune des surfaces sur le plan z = 0 est le domaine D.

  $\iint_{S_1}\ (cos\alpha+\ \sqrt{1-(x^2+y^2)z^2}cos\gamma)\ ds=\iint_D\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \ dxdy-\iint_D\ \sqrt{1-(x^2+y^2)^2}\ \ dxdy=$

  $=\int_0^{2\pi}\underbrace{cos\theta d\theta}_{0}\int_0^1 rdr-\ I_1=-\,I_1$

  $\iint_{S_2}(cos\alpha'\ +\sqrt{1-(x^2+y^2)z^2}cos\gamma)ds=\iint_D\ \frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\ \ dxdy+$

  $\iint_D\ \sqrt{1-(x^2+y^2)(2-x^2-y^2)}\ \ dxdy=\int_0^{2\pi}\underbrace{cos\theta d\theta}_{0}\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{2-r^2}}dr+\ I_2=\ I_2$

  Alors $\boldsymbol{J=I_2-I_1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{4}}$

- En appliquant la formule d'Ostrogradski-Gauss :

  $J=\iiint_U\ (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z})\ dxdydz\qquad \frac{\partial P}{\partial x}=0$

  U est défini par les coordonnées cylindriques. $\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le 1 \\ r\le z\le\sqrt{2-r^2} \end{cases}$.

  $J=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^{\sqrt{2-r^2}}\frac{\partial R}{\partial z}dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r[R(x,y,z)]_r^{\sqrt{2-r^2}}dr\ =\boldsymbol{I_2-I_1}.$

3. C = $S_1\cap S_2$ =$\{(x,y,1)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=1\ \ \}$

  une paramétrisation de C s'écrit $\begin{cases} x=cos\theta\quad dx=-sin\theta d\theta \\ y=sin\theta\quad dy=cos\theta\,d\theta \\ z=1\qquad dz=0 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$

- $I=\oint_C\ (y-x-z)\,dx+(2x+z^2)dy+y^3xz\,dz=$

  $=\int_0^{2\pi}-sin^2\theta+cos\theta sin\theta+2cos^2\theta\ d\theta=\boldsymbol{\pi}.$

- En appliquant la formule de Stokes avec $F(x,y,z)=(y-x-z,(2x+z^2),\ y^3xz\ )=(P,Q,R)$ et la surface σ Limtée par C a pour équation z = 1 , son vecteur normal est $\vec{n}(0,0,1)$, ds= dxdy et D=$proj_{/XOY}$ σ .

  $I=\iint_\sigma\ \overrightarrow{RotF}.\vec{n}\,ds=\iint_D\ (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr=\boldsymbol{\pi}.$