Université de Tlemcen
Département de mathématiques

le 30/05/2016.

Epreuve finale de "Algèbre 4"

durée : 2 heures.

Exercice n°1

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique par $q(x) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ et soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Determiner $F^\perp$, verifier que $N(q) \subset F^\perp$ et determiner $F^{\perp\perp}$

Exercice n°2

Soit $q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \longmapsto q(x) = T_r(x^2) \qquad T_r = \text{Trace}.$$

1°/ Montrer que q est une forme quadratique, determiner $M(q)_e$ et $rg(q)$ ($\{e\}$ étant la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2°/ Déterminer une base $\{v_i\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ orthogonale pour q, les vecteurs isotropes de q, $sgn(q)$ ainsi qu'une base orthonormée pour q de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si elle existe.

Exercice n°3

Déterminer une matrice symétrique non diagonale, appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant 2 valeurs propres strictement positives et une valeur propre strictement négative.

Exercice n°4

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n, q une forme quadratique sur E, montrer qu'il existe une base $\{e_i\}$ de E telle que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ on a : $q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$, où $r = rg(q)$ et p est un entier

Exercice n°5

Suivant la valeur de λ, étudier la signature de la forme quadratique
$$q(x_1, x_2) = (1+\lambda)(x_1^2 + x_2^2) + 2(1-\lambda)x_1x_2 \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice n°6

Soit $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique qui dans la base canonique est définie par $q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - (x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2)$ (avec $p+q \leq n$).
Soit F le sous espace de $\mathbb{R}^n$ tel $q_{/F}$ soit définie positive. Montrer que $\dim F \leq p$

{Ex1 : 4,5 pts ; Ex2 : 7 pts ; Ex3 : 2,5 pts, Ex4 : 3 pts, Ex5 : 3 pts} = 20 pts ; Ex6 : 1,5 pts.

Bon Courage ; Tsounon Bc Saba Wa Stra.

Corrigé de l'épreuve finale de Algèbre 4 du 30/05/2016.

Exercice n° 1

$q(x) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$, soit s la forme polaire associée à q.

$F^\perp = \{y \in \mathbb{R}^3 / s(x,y) = 0 \ \forall x \in F\}$, posons $X = M(x)_{e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = M(y)_{e_i} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

et $S = M(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, remarquons que si $X \in F$, $X = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Cela nous permet d'écrire en utilisant la props du chapitre des espaces Euclidiens:

$F^\perp = \{Y \in \mathbb{R}^3 / {}^tX S Y = 0 \ \forall X \in F\}$

$F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / (\lambda, \lambda, \lambda) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / 2\lambda(y_1 + y_2) = 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$$\boxed{F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / y_1 + y_2 = 0 \right\}}.$$

d'autre part:

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in N(q) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ le syst est compatible

on pose $y_3 = \alpha \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 = -\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in F^\perp$ ce qui montre que $N(q) \subset F^\perp$.

Remarquons tout de suite que si $X \in F^\perp$ alors $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

De la même manière

$F^{\perp\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / (\alpha, -\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

$F^{\perp\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / (\alpha + \beta)(y_2 - y_3) = 0 \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$$\Rightarrow \boxed{F^{\perp\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / y_2 - y_3 = 0 \right\}}.$$

exercice n° 2

$q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto q(x) = x_1^2 + 2x_2x_3 + x_4^2$.

1/- $q(x)$ se présente comme un polynôme homogène de degré 2 en les composants x_i de x dans la base $\{e\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par conséquent q est une forme quadratique.

- $M(q)_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det M(q)_e = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(q) = 4$.

2/ GAUSS $\Rightarrow q(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2+x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_2-x_3)^2 + x_4^2$.

posons $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 + x_3 \\ x_3' = x_2 - x_3 \\ x_4' = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' \\ x_2 = \frac{1}{2}x_2' + \frac{1}{2}x_3' \\ x_3 = \frac{1}{2}x_2' - \frac{1}{2}x_3' \\ x_4 = x_4' \end{cases}$

$$\Rightarrow P = P_{e \to v} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow v_1 = 1 \times e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $v_2 = \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$v_3 = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $v_3 = e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et on peut donc conclure que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, orthogonale pour q.

$I(q) = \{x \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / q(x) = 0\} = \{x = x_1'v_1 + x_2'v_2 + x_3'v_3 + x_4'v_4 /$
$q(x) = x_1'^2 + \frac{1}{2}x_2'^2 - \frac{1}{2}x_3'^2 + x_4'^2 = 0\}$.

$\Rightarrow I(q) = \{x = x_1'v_1 + x_2'v_2 + x_3'v_3 + x_4'v_4 / x_3'^2 = 2x_1'^2 + x_2'^2 + 2x_4'^2\}$

$\Rightarrow I(q) = \{x = x_1'v_1 + x_2'v_2 + x_3'v_3 + x_4'v_4 / x_3' = \sqrt{2x_1'^2 + x_2'^2 + 2x_4'^2}\}$
$\cup \{x = x_1'v_1 + x_2'v_2 + x_3'v_3 + x_4'v_4 / x_3' = -\sqrt{2x_1'^2 + x_2'^2 + 2x_4'^2}\}$.

- D'après la décomposition de GAUSS $sgn(q) = (p, r-p) = (3,1)$
- si la base orthonormée existe $p = 4$ or $p = 3$ et ne dépend pas de la base, contradiction, par conséquent la base orthonormée n'existe pas.

Exercice n°3

Prenons une forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $sgn(q) = (2,1)$. par exemple q définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\{e_i\}$ par :

$$q(x) = x_1^2 + (x_2+x_3)^2 - x_3^2 \Rightarrow q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3.$$

$\Rightarrow$ la matrice cherchée est $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n°4 : voir cours.

Exercice n°5

$$q(x_1, x_2) = (1+\lambda)(x_1^2 + x_2^2) + 2(1-\lambda)x_1x_2 \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- si $\lambda = -1$ $q(x_1,x_2) = 4x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2 \Rightarrow sgn(q) = (1,1)$.
- si $\lambda \neq -1$ $q(x_1,x_2) = (1+\lambda)\left(x_1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_2\right)^2 + \frac{4\lambda}{1+\lambda}x_2^2$ par GAUSS.
  - si $\lambda < -1$ $sgn(q) = (0,2)$
  - si $-1 < \lambda < 0$ $sgn(q) = (1,1)$
  - si $\lambda > 0$ $sgn(q) = (2,0)$.
  - si $\lambda = 0$ $sgn(q) = (1,0)$.

Exercice n°6

considérons $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $G = [e_{p+1}, \dots, e_n]$

$$x \in F \cap G \Rightarrow \begin{cases} x \in F \Longrightarrow q_{/F}(x) = q(x) \geq 0 \\ \text{et} \\ x \in G \Rightarrow q(x) = -x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 \Rightarrow q(x) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow q(x) = 0$$

$\Rightarrow x = 0$ car q est définie positive et $x \in F$, par conséquent $F \cap G = \{0\}$

D'autre part supposons que $\dim F = r$ et montrons que $r \leq p$,
on sait que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$

$= r + (n-p) - 0$ car $\dim G = (n-p)$ et $\dim(F \cap G) = 0$

or $(F+G)$ est un ssev de $\mathbb{R}^n$ donc $\dim(F+G) \leq n$ et par conséquent

$$r + n - p \leq n \Rightarrow r \leq p \Rightarrow \dim F \leq p.$$

Bon Courage pour ceux qui passent le rattrapage et
Bon Ramadhan