Faculté des Sciences
UABBTlemcen
Dept. Mathématiques

Correction du contrôle d'Analyse Complexe

Exercice1

Trouver toutes les solutions de l'équation $e^{\overline{iz}} = \overline{e^{iz}}$.

Soit $z = x+iy$, $\overline{iz} = -y-ix$, ce qui donne $e^{\overline{iz}} = e^{-y}e^{-ix} = e^{-y}(\cos x - i\sin x)$ et $\overline{e^{iz}} = \overline{e^{-y}e^{ix}} = e^{-y}\overline{e^{ix}} = e^{-y}\overline{\cos x + i\sin x} = e^{-y}(\cos x - i\sin x)$ et ainsi $e^{\overline{iz}} = \overline{e^{iz}} \quad \forall z \in C$. On en conclut que l'ensemble des solutions est l'ensemble C tout entier.

Exercice 2

Déterminer les valeurs de z pour lesquelles la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+z^2)^k}$ converge et pour ses valeurs calculer sa somme.

Nous savons que cette série converge pour les valeurs de z telles que $\left|\frac{1}{1+z^2}\right| < 1$ i.e. $\left|1+z^2\right| > 1$. Pour $z = x+iy$, la condition devient $\left(x^2+y^2\right)^2 + 2(x^2-y^2) > 0$. La somme de la série est alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1+z^2\right)^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+z^2}} = 1 + \frac{1}{z^2}.$$

Exercice3

On pose $z = x+iy$, avec $x, y \in R$.

1- Déterminer les constantes a, b et c telles que la fonction $f(z) = x + ay + i(bx+cy)$ soit holomorphe dans C.

2- Quelle est alors la forme de f en fonction de z.

1-Comme les parties réelle $u(x,y) = x+ay$ et imaginaire $v(x,y) = bx+cy$ de f sont différentiables pour que f soit holomorphe (dérivable au sens de la variable complexe z) il faut et il suffit que u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann i.e. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Ce qui se traduit par $c = 1$ et $b = -a$.

La forme de f est alors

$$f(z) = x + ay + i(-ax+y) = (1-ia)(x+iy) = (1-ia)z.$$

Exercice4

On pose $z = x+iy$.

1- Soit $f(x,y) = x^2+y^2+ixy$.

f vérifie -t-elle les conditions de Cauchy-Riemann ?

2-Soit $u(x,y) = x^2-y^2$. Peut-on déterminer $v(x,y)$ pour que $f = u+iv$ soit holomorphe?

3- Si l'on prend dans le plan les coordonnées pôlaires (r,θ) comment s'écrivent les conditions de Cauchy-Riemann?

Comme à l'exercice précédent on pose $u(x,y) = x^2+y^2$ et $v(x,y) = xy$.

1- Alors $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = x$, ce qui montre que les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées.

2- S'il existe une fonction différentiable v telle que $f = u + iv$ soit holomorphe elle doit-être solution du système $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases}$. L'intégration de la première équation donne $v(x,y) = 2xy + C(y)$. On remplace dans la deuxième équation: $2x + C\prime(y) = 2x$ i.e. C =constante. D'où $v(x,y) = 2xy + C$.

3- En coordonnées pôlaires (r,θ) les coordonnées cartésiennes s'écrivent $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ avec $r > 0$. Ce qui donne

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\text{et } \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta.$$

Qui est un système linéaire en $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \sin\theta \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} & r\cos\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \cos\theta & \frac{\partial u}{\partial r} \\ -r\sin\theta & \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{vmatrix}}{r} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

Les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées cartésiennes $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ deviennent en coordonnées pôlaires $\begin{cases} \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial v}{\partial \theta} \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \end{cases}$.