U. A. B. Tlemcen
Département de Mathématiques 2015/2016

Corrigé du contrôle continu d'analyse numérique 2

Exercice 1

1. Trouver la décomposition de Cholesky de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$ et déterminer pour quelles valeurs de α cette décomposition est possible.

2. On considère la matrice suivante: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Utiliser la méthode de Jacobi pour calculer les valeurs propres ainsi que les vecteurs propres de A.

Solution

1. $A = BB^t$, *avec* B *matrice triangulaire inférieure à diagonale positive.*
$$\begin{cases} b_{11} = \frac{1}{a_{11}} = 1 \\ b_{21} = \frac{a_{21}}{b_{11}} = \alpha \\ b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2} = \sqrt{2 - \alpha^2} \end{cases} . \qquad D'où\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \sqrt{2-\alpha^2} \end{pmatrix}.$$
Cette décomposition est possible si la matrice est définie positive, en d'autres termes si $\det(A) > 0$
ce qui equivaut à $2 - \alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < 2 \Leftrightarrow \alpha \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$.

2. $\theta = \frac{\pi}{4}, R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, D = R^tAR = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Les valeurs propres de A *sont* $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$, *les vecteurs propres associés sont respectivement,* $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse et surtout justifier avec précision votre réponse par une démonstration ou un contre exemple. Attention aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. En résolvant un système linéaire $Ax = b$ par une méthode numérique, si la norme du résidu est petite alors l'erreur relative sur la solution est aussi petite.

Faux. Soit $\tilde{x}$ *la solution obtenue numériquemet du système* $Ax = b$ *alors* $r = A\tilde{x} - b = A(\tilde{x} - x)$, *ce qui implique* $\tilde{x} - x = A^{-1}r$ *d'où* $\|\tilde{x} - x\| \le \|A^{-1}\| \, \|r\| \qquad (*)$
d'autre part $Au = b$ *implique* $\|b\| \le \|A\| \, \|u\|$ *de là* $\dfrac{1}{\|u\|} \le \|A\| \dfrac{1}{\|b\|} \qquad (**)$

finalement $(*)$ *et* $(**)$ *donnent* $\quad \dfrac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \leq cond(A)\dfrac{\|r\|}{\|b\|}$

2. On considère la méthode itérative $x^{(k+1)} = Bx^{(k)}+c$ pour la résolution du système linéaire $Ax=b$, si la méthode converge pour toute valeur initiale $x^{(0)}$ alors $\|B\|_\infty < 1$.
Faux. $\|B\|_\infty < 1$ *est une condition suffisante de convergence mais pas nécessaire. Si* $\|B\|_\infty < 1$ *alors la méthode converge pour toute valeur initiale* $x^{(0)}$. *En effet, Si* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$, *alors* $\rho(B) = \frac{1}{2}\sqrt{2} < 1$ *la méthode itérative est convergente mais* $\|B\|_\infty = 2 > 1$.

3. Le rayon spectral satisfait les conditions requise pour être une norme matricielle.
Faux. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho(A) = 0$ *mais* $A \neq 0$.

4. $\forall B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \qquad \|B\|_\infty \leq \rho(B)$.
Faux. Soit λ *une valeur propre de* B *et* x *un vecteur propre associé.* $Bx = \lambda x \Rightarrow |\lambda| \, \|x\|_\infty \leq \|B\|_\infty \|x\|_\infty \Rightarrow |\lambda| \leq \|B\|_\infty \Rightarrow \rho(B) \leq \|B\|_\infty$.

5. Les valeurs propres de la matrice A tridiagonale symétrique $n \times n$ avec $a_{11} = 1$, $a_{ii} = 2, \forall i \geq 2$ et $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1, \forall i \geq 1$ appartiennent à l'intervalle $[0,4]$.
Vrai. La matrice A *étant réelle symétrique, ses valeurs propres sont réelles. De plus les disques de Gershgorin de la matrice* A *sont:*
$D_1 = \{z \in \mathbb{C} / |z-1| \leq 1\}$
$D_i = \{z \in \mathbb{C} / |z-2| \leq 2\} \qquad 2 \leq i \leq n-1$
$D_n = \{z \in \mathbb{C} / |z-2| \leq 1\}$
Les valeurs propres de A *appartiennent à l'intersection de* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i = \{z \in \mathbb{C} / |z-2| \leq 2\}$ *avec l'axe réel. Elles appartiennent à l'intervalle* $[0,4]$.

Exercice 3

Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire

$$A_\varepsilon x = b_\varepsilon \tag{1}$$

avec, $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1-\varepsilon & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3-\varepsilon \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Pour $\varepsilon \neq -1$, le système admet l'unique solution $x = (2,1,2)^t$.

1. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur ε, pour que la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système (1) converge.
2. Déterminer la valeur $\bar{\varepsilon}$ de ε pour que la matrice soit symétrique définie positive.
3. pour $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$

   a. Est-ce que la méthode de Jacobi appliquée au système (1) converge?

   b. Combien d'itérations de la méthode de Jacobi sont nécessaires pour que $\left\|x^{(k)} - x\right\|_2 < 2^{-20}$,si $x^{(0)} = (0,0,0)^t$.

On donne $\log_2(\sqrt{57}) = 2.916\,4$.

Solution

1. *On pose* $A_\varepsilon = D - L - U$ *avec* $D = I$, $\quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $U = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   La matrice d'itération de Gauss-Seidel s'écrit:

   $B_{GS} = (D-L)^{-1} U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon - 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\varepsilon - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Les valeurs propres de B_{GS} *sont* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *et* $\lambda_3 = -\frac{1}{2}(\varepsilon - 1)$.

   Il en découle que $\rho(B_{GS}) = \frac{1}{2}|\varepsilon - 1|$.

   La méthode de Gauss-Seidel converge si et seulement si $\rho(B_{GS}) < 1$, *ce qui équivaut à* $\varepsilon \in (-1, 3)$.

2. A_ε *est symétrique si et seulement si* $\varepsilon = \frac{1}{2}$. *vérifions que* $A_{\frac{1}{2}}$ *est définie positive.*

   $A_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 1 > 0$, $\qquad \Delta_2 = \Delta_3 = \frac{3}{4} > 0$.

   finalement $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}$.

   a. *La matrice* $A_{\bar{\varepsilon}}$ *est à diagonale strictement dominante alors la méthode de Jacobi converge.*

   b. *Nous savons que* $\left\|x^{(n)} - x\right\|_2 \leq \dfrac{\|B_J\|_2^n}{1 - \|B_J\|_2} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_2$

   où $B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Comme B_J *est symétrique* $\|B_J\|_2 = \rho(B_J)$.

   Les valeurs propres de B_J *sont* $\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}$, *donc* $\rho(B_J) = \frac{1}{2}$.

   $x^{(1)} = b_{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_2 = \frac{1}{2}\sqrt{57}$

   $\dfrac{\|B_J\|_2^n}{1 - \|B_J\|_2} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_2 < 2^{-20}$

   $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{2^{-20}}{\sqrt{57}} \Rightarrow 2^n > 2^{20}\sqrt{57} \Rightarrow n > 20 + \log_2\left(\sqrt{57}\right)$

   Le nombre d'itérations nécessaires pour avoir la précision désirée est $n = 23$.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ et soit $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1. Effectuer la décomposition LU de la matrice A. En déduire $det(A)$.

2. Utiliser la décomposition LU pour résoudre le système d'équations linéaires $Ax = b$.

3. Utiliser la décomposition LU pour calculer A^{-1}. Puis trouver $x = A^{-1}b$.

4. Comparer les résultats trouvés en 2. et 3. Quelle méthode choisissez vous? Justifier.

Solution

1. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} m_{21}=\frac{1}{2}, m_{31}=\frac{3}{2}, \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & -1 \end{pmatrix} m_{32}= -5 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

   Donc $A = LU$ avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

   $\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(U) = 2 \times (-2) \times (-6) = 24.$

2. $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

   La résolution de $Ly = b$ donne $y = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -18 \end{pmatrix}$,ensuite $Ux = y$ a pour solution $x = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. *On résoud $AX_i = e_i, i = 1, 2, 3$ où e_i est ieme vecteur de la base canonique.*

   On trouve $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{12} \\ -\frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} \frac{19}{12} \\ -\frac{1}{12} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$,

   ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{12} & \frac{19}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

   $A^{-1}b = \begin{pmatrix} -\frac{11}{12} & \frac{19}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

4. *IL est clair que la solution obtenue en 3. par $x = A^{-1}b$ est 3 fois plus couteuse que l'application directe de l'algorithme en 2. De ce fait, il est judicieux de choisir l'application de la décomposition LU en 2.*