

Contrôle Continu de Géométrie
12 Avril 2016

N.B : L'usage de tout **appareil électronique** est strictement **interdit**

Exercice 1 :

Considérer la courbe $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\alpha(t) = (ae^{-bt} \cos t, ae^{-bt} \sin t)$$

Où $a, b > 0$

1. Donner une limite de $\alpha(t)$ et $\alpha'(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
2. Montrer que α a une longueur finie sur $[0, +\infty[$.
3. Reparamétriser cette courbe par longueur d'arc.

Exercice 2 :

On considère la courbe paramétrée $\beta:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\beta(t) = \left(\int_0^t \sqrt{1 - e^{-2u}} du, e^{-t} \right)$$

1. La courbe β est-elle paramétrée par longueur d'arc ?
2. Soit C_p la droite tangente à la courbe β au point $p = \beta(t)$, on note q l'intersection de C_p avec l'axe (Ox) . Prouver que, pour tout $t > 0$, la distance entre p et q vaut un.
3. Calculer la courbure de β en chaque point.

Exercice 3 :

Soit γ la courbe paramétrée définie par

$$\gamma(t) = \left(\int_0^t \frac{(1 + ch^2u) \cos u}{ch^2u} du, \int_0^t \frac{(1 + ch^2u) \sin u}{ch^2u} du, \int_0^t \frac{(1 + ch^2u)shu}{ch^2u} du \right)$$

1. Déterminer, en un point de γ , le repère de Frenet.
2. Calculer la courbure k et la torsion τ en un point $\gamma(t)$.
3. Vérifier que la fonction $\frac{k}{\tau^2 + k^2}$ est constante.

Barème : Exercice 1: 6pts Exercice 2: 6pts Exercice 3: 8pts

Bon courage

12 Avril 2016
Contrôle continu de Géométrie (le corrigé)

Exercice 1:

Soit la courbe suivante: $\alpha(t) = (ae^{-bt} \cos t, ae^{-bt} \sin t)$

1. Donner une limite de $\alpha(t)$ et $\alpha'(t)$ quand t tend vers $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (ae^{-bt} \cos t, ae^{-bt} \sin t) = (0, 0).$$

Le vecteur vitesse de la courbe α est: $\alpha'(t) = -a (be^{-bt} \cos t + e^{-bt} \sin t, be^{-bt} \sin t - e^{-bt} \cos t)$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -a (be^{-bt} \cos t + e^{-bt} \sin t, be^{-bt} \sin t - e^{-bt} \cos t) = (0, 0).$$

2. Montrer que α a une longueur finie sur $[0, +\infty[$

La longueur de α sur $[0, +\infty[$ est donnée par: $l(\alpha) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$.

$$\text{Or } \|\alpha'(t)\| = a\sqrt{b^2 + 1}e^{-bt}, \text{ donc } \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \frac{-a}{b}\sqrt{b^2 + 1}(e^{-bt} - 1)$$

Ce qui donne: $l(\alpha) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-a}{b}\sqrt{b^2 + 1}(e^{-bt} - 1) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + 1} < +\infty$ sur $[0, +\infty[$.

3. Reparamétriser cette courbe par longueur d'arc:

soit $s(t)$ une abscisse curviligne donnée par $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \frac{-a}{b}\sqrt{b^2 + 1}(e^{-bt} - 1)$. On

fait le changement du paramètre, i.e: $t = \frac{-1}{b} \ln \left(1 - \frac{bs}{a\sqrt{b^2 + 1}} \right)$, et par suite, la nouvelle paramétrisation de la courbe est donnée par:

$$\tilde{\alpha}(t) = a \left(1 - \frac{bs}{a\sqrt{b^2 + 1}} \right) \left(\cos \left(\frac{-1}{b} \ln \left(1 - \frac{bs}{a\sqrt{b^2 + 1}} \right) \right), \sin \left(\frac{-1}{b} \ln \left(1 - \frac{bs}{a\sqrt{b^2 + 1}} \right) \right) \right).$$

Exercice 2:

Considérons la courbe $\beta :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par: $\beta(t) = \left(\int_0^t \sqrt{1 - e^{-2u}} du, e^{-t} \right)$.

1. La courbe β est-elle paramétrée par longueur d'arc ?

On a: $\beta'(t) = (\sqrt{1 - e^{-2t}}, -e^{-t})$ de norme: $\|\beta'(t)\| = 1$.

β est bien paramétrisée par longueur d'arc.

2. Calculons la distance entre $p = \beta(t)$ et $q = C_p \cap (ox)$.

- Déterminons une équation paramétrique de la droite C_p :

La droite C_p est dirigée par $\beta'(t)$, c'est l'ensemble des point $m(t) = (x(t), y(t))$ de \mathbb{R}^2 tels que le vecteur $\overrightarrow{\beta(t)m(t)}$ soit colinéaire à $\beta'(t)$. i.e, il existe une fonction $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{\beta(t)m(t)} = \lambda(t)\beta'(t)$.

ce qui donne
$$\begin{cases} x(t) - \int_0^t \sqrt{1 - e^{-2u}} du = \lambda(t)\sqrt{1 - e^{-2t}} \\ y(t) - e^{-t} = -\lambda(t)e^{-t} \end{cases}, \text{ et par suite la représentation paramétrique}$$

de C_p est donnée par
$$\left(\int_0^t \sqrt{1 - e^{-2u}} du + \lambda(t)\sqrt{1 - e^{-2t}}, (1 - \lambda(t))e^{-t} \right)$$

- Soit q l'intersection de la droite C_p avec l'axe (ox) c-à-d $(1 - \lambda(t))e^{-t} = 0$ et donc $\lambda(t) = 1 \quad \forall t \in]0, +\infty[$. Par suite $q = \left(\sqrt{1 - e^{-2t}} + \int_0^t \sqrt{1 - e^{-2u}} du, 0 \right)$
- La distance entre p et q est le réel $pq = \|\vec{pq}\|$, or $\vec{pq} = (\sqrt{1 - e^{-2t}}, -e^{-t})$ de norme $\|\vec{pq}\| = \sqrt{1 - e^{-2t} + e^{-2t}} = 1 = pq$

3. Calculons la courbure de β :

$$k(t) = \|T'(t)\|, \text{ et comme } T(t) = \beta'(t) = (\sqrt{1 - e^{-2t}}, -e^{-t}), \text{ alors } T'(t) = \left(\frac{e^{-2t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}, e^{-t} \right)$$

$$\text{d'où } k(t) = \|T'(t)\| = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}.$$

Exercice 3:

$$\text{soit } \gamma(t) = \left(\int_0^t \frac{(1 + ch^2u) \cos u}{ch^2u} du, \int_0^t \frac{(1 + ch^2u) \sin u}{ch^2u} du, \int_0^t \frac{(1 + ch^2u) shu}{ch^2u} du \right)$$

le vecteur vitesse de la courbe γ est: $\gamma'(t) = \frac{(1 + ch^2t)}{ch^2t} (\cos t, \sin t, sht)$ de norme:

$$\|\gamma'(t)\| = \frac{(1 + ch^2t)}{cht}.$$

1. Déterminer le repère de Frenet:

- Posons $v(t) = \frac{(1 + ch^2t)}{cht}$. Le vecteur tangent $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{v(t)} = \frac{1}{cht} (\cos t, \sin t, sht)$
- Le vecteur normal: $N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ où $T'(t) = \frac{1}{ch^2t} (-\sin tcht - sht \cos t, \cos tcht - \sin tsht, 1)$
de norme $\|T'(t)\| = \frac{\sqrt{2}}{cht}$, d'où

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}cht} (-\sin tcht - sht \cos t, \cos tcht - \sin tsht, 1)$$

- Le vecteur binormal est: $B(t) = T(t) \wedge N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}cht} (\sin tcht - sht \cos t, -cht \cos t - sht \sin t, 1)$.

2. Calculer la courbure κ et la torsion τ :

- La courbure: $\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{v(t)} = \frac{cht}{(1 + ch^2t)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{cht}$. Enfin $\kappa(t) = \frac{\sqrt{2}}{1 + ch^2t}$.

- La torsion: $\tau(t) = -\frac{1}{v(t)} \langle B'(t), N(t) \rangle$, or $B'(t) = \frac{sht}{\sqrt{2}ch^2t} (cht \sin t + sht \cos t, sht \sin t - cht \cos t, -1)$

$$\text{donc } \tau(t) = -\frac{cht}{(1 + ch^2t)} \left(\frac{sht}{2ch^3t} (-2ch^2t) \right) \text{ d'où } \tau(t) = \frac{sht}{1 + ch^2t}.$$

3. Vérifier que la fonction $\frac{\kappa}{\tau^2 + \kappa^2}$ est constante:

$$\frac{\kappa}{\tau^2 + \kappa^2} = \frac{\sqrt{2}(1 + ch^2t)}{(sh^2t + 2)} = \frac{\sqrt{2}(1 + ch^2t)}{(1 + ch^2t)}, \text{ ainsi } \frac{\kappa}{\tau^2 + \kappa^2} = \sqrt{2}$$