Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
13/04/16
L2 MATH /Analyse IV

CONTROLE CONTINU (**durée 02h**)

Exercice 01 :09 pts

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = -y^2 cosx + 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 - 3\int_{-x}^{y} Sh(xyt^2)\ dt$

1) Montrer que f est de classe C[1] dans $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer $\nabla f(0,0)$ et montrer que f admet un minimum relatif au point $(0,0)$.

3) Calculer $\nabla f(0,1)$ et $D_{\vec{v}} f(0,1)$ où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire. Donner la valeur maximale du taux de croissance de f au point $(0,1)$, indiquer la direction suivant laquelle il est obtenu .

4) Calculer approximativement la valeur de $f(x,y)$ au point $(0.007\ ,\ 0.997)$.

5) On considère la surface d'équation $(S)\ z = f(x,y)$, écrire l'équation du plan tangent (P) à la surface (S) au point $(0\ ,1,\ \frac{1}{2})$.

6) Soit $d: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $d(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, étudier l'existence du minimum de d avec la condition : $z + x - y + \frac{1}{2} = 0$ .On utilisera la méthode de multiplicateur de Lagrange.
En déduire le point du plan tangent (P) le plus proche de l'origine O des coordonnées.

Exercice 02 : 05pts

1/ Soit la forme différentielle dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$: $\omega = (y - 2lnx)dx + xdy$
Montrer que ω est une différentielle totale et déterminer la fonction correspondante.
En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) : $xy' + y = 2lnx$

2/ Soit $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ de classe C[2] et: $h: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ classe C[2] telle que
$f(x,y) = \mathrm{h}(\mathrm{r})$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction de $\mathrm{h}'(\mathrm{r})$ et $\mathrm{h}''(\mathrm{r})$ puis trouver les fonctions

h telle que : $\Delta \boldsymbol{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\boldsymbol{ln(x^2+y^2)}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2}}}$.

- Déterminer les solutions f qu'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice3 : 06 pts

Soit $f: R^3 \to R^3$ telle que : $\forall X \in R^3\ \ f(X) = (\|X\|^2 - 2)X$.

1) Montrer que f est de classe C[1] dans R^3et déterminer $J_f(X)\ \ \forall X \in R^3$.
(Vérifier que $J_f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$)
2) Montrer que $J_f(X)$ est différente de la matrice nulle $\forall X \in R^3$.
3) Soit (S) la sphère de centre O et de rayon R= $\sqrt{2}$ et A et B deux points de (S) .

Que peut-on conclure sur la validité du théorème de Rolle sur le segment $[AB]$?

4) Soit g : $R^2 \to R^3$ telle que : $g(u,v) = f(u - 2v, v, u.sinv)$

Montrer que g est de classe C[1] dans R^2et déterminer $dg(1,0)$ .Calculer la dérivée de g au point (1,0) suivant la direction de la première bissectrice).

(N.B : La norme utilisée est la norme euclidienne) Bon Courage !

UNIVERSITE DE TLEMCEN
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
Corrigé du contrôle continu /Avril 2016

Exercice1:09pts

1)(0.25pt)

$f : R^2 \to R^2$: $f(x,y) = -y^2 cosx + 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 - 3\int_{-x}^{y} Sh(xyt^2)dt$ est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ car

Les fonctions $(x,y) \longmapsto 2x^2 + \frac{3}{2}y^2$: *polynôme* est de classse C^∞ dans $\mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto x \mapsto \cos x$: est la composée de fonctions de classse C^∞ dans $\mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto y^2 \cos x$: *produit* de *fonctions de* classse C^∞ dans $\mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto Sh(xyt^2)$ est la composée de fonctions de classse C^∞ dans $\mathbb{R}^2 alors$

la fonction définie par l'intégrale $(x,y) \longmapsto 3\int_{-x}^{y} Sh(xyt^2)dt$ est aussi de classse C^2dans $\mathbb{R}^2 car$ les fonctions dans les bornes de l'intégrale sont de classse C^∞ dans $\mathbb{R}^2$.

2) (03.75pts)

$\forall (x,y) \in R^2$ $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \sin x + 4x - 3Sh(yx^3) - 3\int_{-x}^{y} yt^2 Ch(xyt^2)dt$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\ cosx + 3y - 3Sh(xy^3) - 3\int_{-x}^{y} xt^2 Ch(xyt^2)dt$$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$ alors $(0,0)$ est un point critique.

f est de classe C^2alors on calcule le disciminent $\triangle$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 \cos x + 4 - 9x^2 y\ Ch(yx^3) - 3yx^2 Ch(yx^3) - 3\int_{-x}^{y} (yt^2)^2 Sh(xyt^2)dt$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\cos x + 3 - 9y^2 x\ Ch(xy^3) - 3y^2 x Ch(y^3 x) - 3\int_{-x}^{y} (xt^2)^2 Sh(xyt^2)dt$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y \sin x - 3x^3\ Ch(x^3 y) - 3y^3 Ch(y^3 x) - 3\int_{-x}^{y} t^2 Ch(xyt^2) + xyt^4 Sh(xyt^2)dt$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4 \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1 \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$

$\triangle = s^2 - rt = -4 < 0$ et $r > 0 \Longrightarrow$ f admet un minimum relatif au point (0,0).

3)(01.75pts)

$\nabla f(0,1) = (-1,1)$ et avec $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $D_{\vec{v}} f(0,1) = \nabla f(0,1).\vec{v} = -\cos\theta + \sin\theta$.

La valeur maximale du taux de croissance de f est égal à $\|\nabla f(0,1)\| = \sqrt{2}$

et c'est la dérivée suivant la direction de $\nabla f(0,1)$ ie $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

4)(0.75pt)

L'approximation affine de $f(x,y)$ au voisinage du point $(0,1)$: s'écrit:

$$f(o+h,1+k) \simeq f(0,1) + \lessdot \nabla f(0,1),(h,k) \gtrdot = 0.50 - h + k$$

$f(0.007, 0.997) = f(0 + 0.007, 1 - 0.003) \simeq 0,50 - 0.007 - 0.003 = 0.49$

5)(0.5pt)
L'équation du plan tangent (P) à la surface (S) $z = f(x,y)$ au point (0 , 1, 1/2).
$(P)\ \ z - f(0,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\,(y-1) = -x + y - 1$
$(P)\ \ z = -x + y - \frac{1}{2}$

6) (02.25pts)
$d(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, étude de l'existence du minimum de d avec la condition :$g(x,y,z) = z + x - y + 1/2 = 0$.

On utilise la méthode de multiplicateur de Lagrange:

$\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z + x - y + 1/2)$ est de classe C^{2}dans R^3

la condition nécessaire d'extrémum:$\begin{cases} \Phi'_x = 2x + \lambda = 0 \\ \Phi'_x = 2y - \lambda = 0 \\ \Phi'_x = 2z + \lambda = 0 \\ z + x - y + 1/2 = 0 \end{cases}$

donne $x^* = z^* = -y^* = \frac{-1}{6}$ .La valeur $d(x^*, y^*, z^*) = \frac{3}{36}$est un minimum, car $d^2\Phi = 2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \succ 0$

(la condition supplémentaire $dg = dz + dx - dy = 0$ n'est evidement pas nécéssaire pour l' étude du signe de $d^2\Phi$)
On déduit que $\left(\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}; \frac{-1}{6}\right)$ est le point du plan tangent (P) le plus proche de l'origine O des coordonnées avec une distance égale à .$\frac{\sqrt{3}}{6}$

Exercice 02 : 05pts

1/ $(02.5pts)$
$\omega = (y - 2\ln x)dx + xdy = Pdx + Qdy$
$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ alors $\omega = df$ ainsi$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y - 2\ln x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \end{cases}$
d'où $f(x,y) = \int y - 2\ln x \ \ dx = xy - 2x\ln x + 2x + c(y)$
$\frac{\partial f}{\partial y} = x = x + c'(y) \Longrightarrow c(y) = c \in R$
d'où $\quad f(x,y) = xy - 2x\ln x + 2x + c$
$(E) : xy' + y = 2\ln x \Leftrightarrow xdy + (y - 2\ln x)dx = 0 \Leftrightarrow df = 0$
$df = 0 \Leftrightarrow f(x,y) = cst \Leftrightarrow y = \frac{k}{x} + 2\ln x - 2x \quad ,k \in R$

Les solutions de l'équation différentielle (E) : s'écrivent $\quad y = \frac{k}{x} + 2\ln x - 2$ $, k \in R$

2)(02.5pts)

$$f(x,y) = h(r) \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{alors} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} h'(r) = \frac{x}{r} h'(r) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} h'(r) = \frac{y}{r} h'(r) \end{cases}$$

$$\text{et} \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} h'(r) + \frac{x^2}{r^2} h''(r) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} h'(r) + \frac{y^2}{r^2} h''(r) \end{cases} \qquad \text{d'où} \quad \triangle f = h''(r) + \frac{1}{r} h'(r)$$

$\triangle f = \frac{2\ln r}{r} \Leftrightarrow r h''(r) + h'(r) = 2\ln r.$

Donc d'aprés 1) $\quad h'(r) = \frac{k}{r} + 2\ln r - 2 \quad , k \in R \quad$ et $\quad h(r) = k\ln r + 2r\ln r - 4r + c$ avec $k, c \in R$

ou $\ f(x,y) = k\ln\left(x^2+y^2\right) + 2\sqrt{x^2+y^2}\ln\left(x^2+y^2\right) - 4\sqrt{x^2+y^2} + c$

$\lim_{r\to 0} h(r) = \lim_{r\to 0} k\ln r + 2r\ln r - 4r + c = \begin{cases} c & \text{si} \quad k = 0 \\ \pm\infty & \text{si} \quad k \neq 0 ... \end{cases}$

Les solutions f qu'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}^2$ .sont donc de la forme:

$f(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2}\ln\left(x^2+y^2\right) - 4\sqrt{x^2+y^2} + c, \ \ c \in \mathbb{R}$

Exercice3 : 06 pts

1)(02pts)

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-2)(x,y,z)$

$f(x,y,z) = \left(x^3 + xy^2 + xz^2 - 2x, \ \ x^2y + y^3 + yz^2 - 2y, \ \ zx^2 + zy^2 + z^3 - 2\right)$

les trois composantes de f sont des fonctions polynômiales dans $\mathbb{R}^3$elles sont alors de classe C^1 dans R^3 ainsi que la fonction f.

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2+y^2+z^2-2 & 2xy & 2xz \\ 2xy & x^2+3y^2+z^2-2 & 2yz \\ 2xz & 2yz & x^2+y^2+3z^2-2 \end{pmatrix}$$

$$J_f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2)(0.75pt)

$\forall X \in \mathbb{R}^3 \ \ J_f(X)$ est différente de la matrice nulle en effet ,supposons ,par absurde

$$\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 3x^2+y^2+z^2 = 2 & (1) \\ x^2+3y^2+z^2 = 2 & (2) \\ x^2+y^2+3z^2 = 2 & (3) \\ xy = 0 \text{ et } \ xz = 0 \ \text{ et } \ yz = 0 & (4) \end{cases}$$

d'aprés (4) $xy = 0$ et $xz = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = z = 0$

* si $x = 0$ et $yz = 0$ alors $y = 0$ ou $z = 0$ supposons $x = y = 0$

$(1) - (3) \Rightarrow z = 0$ ce qui est impossible car $(0, 0, 0)$ ne vérifie ni (1) ni (2) ni (3)

*si $y = z = 0$ $(1) - (2) \Rightarrow x = 0$ ce qui est impossible !

3)(0.75pt)

A et B deux points de (S) la sphère de centre O et de rayon R= $\sqrt{2}$. alors $f(A) = f(B) = 0_{\mathbb{R}^3}$

Sachant que f est classe C^1 sur $[AB]$ alors si on applique le théorème de Rolle $\exists C \in \,]AB[\;\; : f'(C) = 0$ ce qui est impossible d'aprés 2)

On conclue que le théorème de Rolle n'est pas valide pour les fonctions véctorielles.

4)(02.5pts)

$g(u, v) = f(u - 2v, v, u.sinv) = f \circ h(u, v)$ avec $h(u, v) = (u - 2v, v, u.sinv)$

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est de classe C^1 car les trois composantes sont de classe C^1 comme somme et produit de fonctions de classe C^1

$$J_h(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix} \qquad J_h(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $g = f \circ h$ est de classe C^1(*composée* de deux fonctions de classe C^1)

$dg(1, 0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ sa matrice associée est la matrice jacobienne $J_g(1, 0)$.

$dg(1, 0) = df(h(1, 0)) \circ dh(1, 0)$, matriciellement :$J_g(1, 0) = J_f(h(1, 0)) . J_h(1, 0)$

$$J_g(1, 0) = J_f(1, 0, 0) . J_h(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La dérivée de g au point (1,0) suivant la direction de la première bissectrice $\overrightarrow{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$:

$$D_{\overrightarrow{v}} g(1, 0) = J_g(1, 0) . \overrightarrow{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$