Université de Tlemcen. le 14/04/2016

Département de mathématiques.

Partiel d'Algèbre 4

durée : 2 heures

Exercice n° ①

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, montrer que :

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(P, Q) \longmapsto \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

définit un produit scalaire sur E

Exercice n° ②

Préciser la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, qui dans la base canonique est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice n° ③

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E

a/ Montrer que $\mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^{\perp}$

b/ En déduire que $\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp}$

c/ Montrer que $[\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u] \Rightarrow (u + u^*)$ est bijective.

Exercice n° ④

Soit $A \in O(3, \mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $A = M(f)_{e_i}$, $\{e_i\}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on suppose que $A \neq \pm I$ et que $\det A = 1$, on admet que 1 est une valeur propre de A et que $\dim E_1 = 1$

1°/ Montrer que $f(E_1^{\perp}) \subset E_1^{\perp}$

2°/ Montrer que $\det f_{/E_1^{\perp}} = 1$

[Ex1 : 4pts + Ex2 : 4pts + Ex3 : 7pts + Ex4 : 5pts] = 20pts

Exercice n° ⑤

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifiant $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$

Montrer que $\forall x \in E \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$

Ex5 : 1,5pts

Bon Courage

Corrigé du partiel d'Algèbre 4 du 14/04/2016.

Exercice n° 1

Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ et considérons l'application φ définie par :

$$\varphi : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$(P,Q) \longmapsto \varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k) \ .$$

Montrons que φ est un produit scalaire sur E.

- Bilinéarité, symétrie et positivité claires
- $\varphi(P,P)=0 \Rightarrow \sum_{k=0} P^2(k)=0 \Rightarrow \forall k\in\{0,1,\dots,n\}\ P(k)=0$

$\Rightarrow$ P admet au moins $(n+1)$ racines or $d°P\leq n$ donc $P=0$

$\Rightarrow \varphi$ est définie positive, par conséquent φ est un P.S. sur E.

Exercice n° 2

$$\text{Soit } A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A.{}^tA=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow A.{}^tA=I \Rightarrow A \text{ est orthogonale.}$$

$\det A=-1 \Rightarrow A$ représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, une rotation autour de l'axe E_{-1} suivie de la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$, l'angle de rotation θ est donné par

$$T_r A = 2\cos\theta - 1$$

Déterminons θ, E_{-1} et $E_{-1}^{\perp}$

- $T_rA=2\cos\theta-1 \Rightarrow 0=2\cos\theta-1 \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta=\frac{2\pi}{3}}$
- $E_{-1}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 / (A+I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$; $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Delta=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ le syst est compatible on pose $z=\alpha \Rightarrow \begin{cases}x+y=0\\ y=\alpha\end{cases}$

$\Rightarrow x=-\alpha$. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow E_{-1}=[v_1]$

- $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-1}^{\perp} \Rightarrow \left\langle \begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}, \underbrace{\begin{matrix}-\alpha\\\alpha\\\alpha\end{matrix}}_{v_1} \right\rangle=0\ \forall\alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow \alpha(-x+y+z)=0\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow x-y-z=0$ Donc $E_{-1}^{\perp}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 / x-y-z=0\right\}$.

Exercice n° 3

a/ Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E.
Tout d'abord montrons que $Im\, u^* \subset (Ker\, u)^{\perp}$

$y \in Im\, u^* \Rightarrow \exists a \in E / y = u^*(a)$, montrons que $y \in (Ker\, u)^{\perp}$, pour cela prenons $x \in Ker\, u$ et montrons que $\underset{x \in Ker\, u}{<y, x> = 0}$ en effet.

$<y, x> = <u^*(a), x> = <a, u(x)> = <a, 0> = 0$

$\Rightarrow y \in (Ker\, u)^{\perp}$ par conséquent $Im\, u^* \subset (Ker\, u)^{\perp}$ ①.

Pour avoir l'égalité montrons que $\dim Im\, u^* = \dim (Ker\, u)^{\perp}$.

On sait que $\dim E = \dim Ker\, u + \dim Im\, u$. (Th. du rang)

et $\dim E = \dim Ker\, u + \dim (Ker\, u)^{\perp}$ (cours)

ce qui donne que $\dim (Ker\, u)^{\perp} = \dim Im\, u$ or $\dim Im\, u = \dim Im\, u^*$ ($rg\, u = rg\, u^*$)

on aura donc $\dim Im\, u^* = \dim (Ker\, u)^{\perp}$ ②

Concl : ① et ② $\Rightarrow Im\, u^* = (Ker\, u)^{\perp}$

b/ ⓐ $\Rightarrow Im\, u^* = (Ker\, u)^{\perp} \Rightarrow Im\, u^{**} = (Ker\, u^*)^{\perp}$

$\overset{u^{**}=u}{\Longrightarrow} Im\, u = (Ker\, u^*)^{\perp} \Rightarrow (Im\, u)^{\perp} = (Ker\, u^*)^{\perp\perp} \Rightarrow Ker\, u^* = (Im\, u)^{\perp}$

c/ Hyp : $Im\, u = Ker\, u$. et $(u+u^*)$ bijective c'est à dire $Ker(u+u^*) = 0$

Soit $x \in Ker(u+u^*) \Rightarrow u(x) + u^*(x) = 0 \Rightarrow u^*(x) = -u(x)$.

$u(x) \in Im\, u$

$u^*(x) \in Im\, u^* \overset{ⓐ}{=} (Ker\, u)^{\perp} \underset{Im\, u = Ker\, u}{\overset{Hyp}{=}} (Im\, u)^{\perp} \Rightarrow <u^*(x), u(x)> = 0$

$(Im\, u)^{\perp} \; \perp \; Im\, u$

$\overset{u^*(x) = -u(x)}{\Longrightarrow} - <u(x), u(x)> = 0 \Rightarrow u(x) = 0$

$\Rightarrow u^*(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker\, u$ et $x \in Ker\, u^* \overset{(b)}{=} (Im\, u)^{\perp} \overset{Hyp}{=} (Ker\, u)^{\perp}$

$\Rightarrow x \in Ker\, u$ et $x \in (Ker\, u)^{\perp} \Rightarrow x \in (Ker\, u) \cap (Ker\, u)^{\perp} \Rightarrow x \in \{0\}$

$\Rightarrow Ker(u+u^*) \subset \{0\} \Rightarrow Ker(u+u^*) = \{0\} \Rightarrow (u+u^*)$ est injective.

$\Rightarrow (u+u^*)$ est bijective. c.q.f.d.

Exercice n° 4 : voir cours.

Exercice n° 5

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de E formée par des vecteurs propres de u (elle existe car u est diagonalisable, du moment que u est symetrique sur un ep. euclidien).

$x \in E \Rightarrow x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow u(x) = x_1 u(e_1) \dots + x_n u(e_n)$.

$\Rightarrow u(x) = \lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n \Rightarrow <u(x), x> = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ car $\{e_i\}$ orthon.

et $\|x\|^2 = \sum_{i=1} x_i^2$ ($\{e_i\}$ orthon) comme $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, nous aurons

$\lambda_1 \|x\|^2 \leq <u(x), x> \leq \lambda_n \|x\|^2$. c.q.f.d