Dept. Mathématiques
Faculté des Sciences

Epreuve de rattrapage de Topologie sept. 2016
Durée 1h30

Exercice1 (6 points)

Soit d la distance euclidienne sur R^2. On fixe un point p dans R^2 . Pour $x,\, y \in R^2$, on pose

$$D(x,y) = \begin{cases} d(x,y) \text{ si les points } x, y{,}p \text{ sont alignés} \\ d(x,p) + d(p,y) \text{ si les points } x{,}y{,}p \text{ ne sont pas alignés.} \end{cases}$$

a) Prouver que D est une distance sur R^2.

b) i) Soit $r > 0$. Donner la boule ouverte $B_D(p,r)$ de centre p et de rayon r pour la distance D.

ii) Soit $m \in R^2 - \{p\}$. Donner la boule ouverte $B_D(m,r)$.

Exercice 2 (4 points)

Soit A et B les parties de R suivantes

$$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in N^* \right\},\ B = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{n},\ p, n \in N^* \right\}.$$

Déterminer l'intérieur et l'adhérence des ensembles A et B.

Exercice3 (6 points)

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs vérifiant

$$(n+p)\, x_{n+p} \leq n x_n + p x_p.$$

a) Montrer que, si $k,\, n \in N^*$, on a $x_{kn} \leq x_n$. (Raisonner par récurrence sur k).

b) Soit $l = \inf \{x_n,\ n \in N^*\}$. Prouver que $\inf \{x_{kn},\ n \in N^*\} = l$.

Exercice4 (4 points)

Soit X un espace métrique.

Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite convergente dans X et l sa limite. Montrer que $\{l\} \cup \{x_n, n \in N\}$ est une partie compacte de X.

Correction

Exercice1

a) Montrons que D est une distance sur R^2

Si les points p, x, y sont alignés alors $D(x,y) = d(x,y)$ et comme d est une distance, $D(x,y) = d(x,y) = 0$ entraîne que $x = y$.

Maintenant si les points p, x, y ne sont pas alignés $D(x,y) = d(x,p) + (p,y) = 0$ donne $d(x,p) = d(y,p) = 0$ i.e. $x = y = p$.

La symétrie de D découle directement de la symétrie de d.

Par ailleurs, pour x,y,$z \in R^2$; si x, z, p sont alignés

$D(x,y) + D(y,z) \geq d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) = D(x,z)$.

Maintenant si x, z, p ne sont pas alignés, alors nécéssairement x,y, p ne sont pas alignés ou bien y,z, p ne sont pas alignés. Supposons par exemple que x,y,p ne sont pas alignés

$D(x,y)+D(y,z) \geq d(x,p)+d(p,y)+d(y,z) \geq d(x,p)+d(p,z) \geq D(x,z)$.

b) i) Boule ouverte centrée en p et de rayon r

$B_D(p,r) = \{x \in R^2\colon\ D(p,x) < r\} = \{x \in R^2\colon\ d(p,x) < r\} = B_d(p,r)$.

ii) Boule ouverte centrée en m et de rayon r

$B_D(m,r) = \{x \in R^2\colon\ D(m,x) < r\} = \{x \in R^2\colon\ d(m,p) + d(p,x) < r\}$

$= \begin{cases} \{x \in R^2\colon\ d(p,x) < r - d(m,p)\} \text{ si } r > d(m,p) \\ \phi \quad \text{si} \quad r \leq d(m,p). \end{cases} = \begin{cases} B_d(p, r - d(m,p)) \text{ si } r > d(m,p) \\ \phi \quad \text{si} \quad r \leq d(m,p). \end{cases}$

Exercice2

Nous savons qu'un ouvert de A est de la forme $A \cap U$ où U est un ouvert de R. Ce qui montre que les ouverts de A sont soit le vide soit les parties de A en paticulier A est une partie ouverte de R et puisque tout élément de l'adhérence $\bar{A}$ de A est une limite d'une suite de A, on obtient:

$\overset{o}{A} = A$ et $\bar{A} = A \cup \{0\}$.

Même chose pour B

$\overset{o}{B} = B$ et $\overline{B} = B \cup A \cup \{0\}$.

Exercice3

a) Montrons par récurrence sur k la relation $x_{kn} \leq x_n$ pour $k, n \in N^*$.

La relation est vraie pour $k = 1$. Supposons la vraie pour le rang $k \geq 1$ et vérifions qu'elle reste vraie pour le rang suivant:

En effet nous avons par hypothèse

$$x_{(k+1)n} \leq \frac{kn}{kn+n} x_{kn} + \frac{n}{kn+n} x_n \overset{\text{hypothèse de récurrence}}{\leq} \frac{kn}{kn+n} x_n + \frac{n}{kn+n} x_n = x_n.$$

b) Posons $l = \inf\{x_n : n \in N^*\}$ (qui existe) et montrons que $l = \inf\{x_{kn} : n \in N^*\}$.

Puisque $\{x_{kn} : n \in N^*\} \subset \{x_n : n \in N^*\}$ nous avons

$$l \leq \inf\{x_{kn} : n \in N^*\}. \tag{1}$$

Maintenant en à l'infimum par rapport à n dans la relation $x_{kn} \leq x_n$, on obtient

$$\inf \{x_{kn} : n \in N^*\} \leq \inf \{x_n : n \in N^*\} = l. \tag{2}$$

De (1) et (2), on obtient que

$$l = \inf \{x_{kn} : n \in N^*\}.$$

Exercice4

Montrer que $A = \{l\} \cup \{x_n, n \in N\}$ est une partie compacte de l'espace métrique X.

Nous savons qu'une partie d'un espace métrique est compacte si de toute suite de cette partie admet une sous suite convegente . Comme par hypothèse la suite $(x_n)_{n\in N}$ converge vers $l \in X$, toute sous-suite d'une suite de A est soit de la forme $\{x_{n_k}, k \in N\}$ ou bien de la forme $\{l\} \cup x_{n_k}, k \in N$ qui dans les deux cas converge vers $l \in A$. A est donc compacte de X.

On peut montrer aussi montrer que de tout recouvrement ouvert de A on peut en extraire un sous-recouvrement fini. En effet, soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A et $l \in U_{i_o}$. Comme la suite $(x_n)_{n\in N}$ converge vers l, il existe $n_o \in N$ tel que pour tout $n \geq n_o$, $x_n \in U_{i_o}$. Si $x_i \in U_i$ pour $i = 0, 1, ..., n_o - 1$, alors $A \subset \cup_{i=0}^{n_o-1} U_i \cup U_{i_o}$.