Université de Tlemcen. le 06/09/2016

Département de mathématiques

Rattrapage de Algèbre 3.

durée : 1h30

exercice n° 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

1°/ A est elle diagonalisable ? Trigonaliser A en précisant la matrice de passage, résoudre le système $\dfrac{dX}{dt} = A.X$.

2°/ Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Mettre sous forme de Jordan la matrice B et calculer B^n.

exercice n° 2

Déterminer toutes les matrices A de $M_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A^2 - 4A + 3I = 0$$

exercice n° 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E, montrer que si f est diagonalisable alors $m_f(X)$ est scindé et a toutes ses racines simples.

exercice n° 4

Soit le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & 0 \\ a & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & a & 2a \end{vmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\Delta_n = 2a\Delta_{n-1} - a^2\Delta_{n-2}$ et en déduire par récurrence que $\Delta_n = (n+1)a^n$

Ex1 : 9pts ; Ex2 : 3,5pts ; Ex3 : 3,5pts ; Ex4 : 4pts

Bon Courage

Corrigé de l'épreuve de rattrapage du module "Algèbre 3" du 06/09/2016.

Exercice n° 1

1°/ $A = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$

A est diagonalisable $\Leftrightarrow m_A(A) = (A+I)(A-I) = 0$?

$(A+I)(A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m_A(\lambda)$ n'a pas de racines simples $\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable.

$P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \Rightarrow P_A(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ il existe $\{v_1, v_2, v_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$A' = M(f)_{v_i} = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Détermination de v_1.

① $f(v_1) = v_1 \Rightarrow (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & -2 \end{matrix} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ on pose $z = \alpha \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = -2\alpha \end{cases} \Rightarrow x = 0$ et $y =$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solution de ① $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; on prend $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Détermination de v_2

$f(v_2) - v_2 = a v_1$; on prend $a = 1 \Rightarrow (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ le système est compatible

on pose $z = \alpha \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = -2\alpha + 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0$ et $y = \alpha - \frac{1}{2}$

$\alpha = 0 \Longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

* Determination de v_3.

$f(v_3) + v_3 = b v_1 + c v_2$; on prend $b = c = 0$

$\Rightarrow (A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. on pose $x = \alpha \Rightarrow \begin{cases} -2z = 0 \\ -2y + 4z = -2\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow z = 0$ et $y = \alpha$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solution de ③ $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; on prend $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion.

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Résolvons $\frac{dX'}{dt} = A'X' \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt} \\ \frac{dy'}{dt} \\ \frac{dz'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \frac{dz'}{dt} = -z' \Rightarrow z' = c_3 e^{-t}$; $\frac{dy'}{dt} = y' \Rightarrow y' = c_2 e^{t}$

$\frac{dx'}{dt} - x' = c_2 e^{t}$ et après calcul on trouve $x' = c_1 e^{t} + c_2 t e^{t}$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (c_1 + c_2 t)e^{t} \\ c_2 e^{t} \\ c_3 e^{t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = c_3 e^{-t} \\ y = (c_1 + c_2 t - \frac{1}{2} c_2)e^{t} + c_3 e^{-t} \\ z = (c_1 + c_2 t)e^{t} \end{cases}$

2°/ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_B(\lambda) = -(\lambda-2)^2 \Rightarrow m_B(\lambda) = \begin{cases} (\lambda-2) \\ \text{ou} \\ (\lambda-2)^2 \\ \text{ou} \\ (\lambda-2)^3 . \end{cases}$

$m_B(\lambda) = (\lambda-2) \overset{?}{\Longleftrightarrow} B-2I=0 \overset{?}{\Longleftrightarrow} B=2I$ impossible car $B \neq 2I$.

$m_B(\lambda) = (\lambda-2)^2 \overset{?}{\Longleftrightarrow} (B-2I)(B-2I) = (0)$.

$(B-2I)(B-2I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m_B(x) = (\lambda-2)^2$.

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\delta = -2 \neq 0$, le système est compatible on pose $y = 2\alpha$ et $z = \beta \Rightarrow x = \alpha$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{W_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{W_2} \Rightarrow \dim E_2 = 2$.

$\underset{\text{Th de Jordan}}{\Longrightarrow}$ il existe $\{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ telle que $M(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} = A'$

Après calcul on trouve $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B^n = P B'^n P^{-1} = 2^n \begin{pmatrix} -n & n+1 & 0 \\ -2n & n+1 & 0 \\ -n & \frac{n}{2} & 1 \end{pmatrix}$

avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Exercice n° 3

$A^2 - 4A + 3I = 0 \Rightarrow P(X) = X^2 - 4X + 3$ est un polynôme annulateur de A

$P_A(X) = (X-1)(X-3)$, comme $m_A(X)$ est un diviseur de $P(X)$ et $A \in M_2(\mathbb{R})$, nous avons 3 cas possibles.

1er cas : $m_A(X) = (X-1) \Rightarrow m_A(A) = 0 \Rightarrow A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2ème cas : $m_A(X) = X-3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

3ème cas : $m_A(X) = (X-1)(X-3) \Rightarrow P_A(X) = (X-1)(X-3) \Rightarrow \operatorname{Tr} A = 4$ et $\det A = 3$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 4-a \end{pmatrix}$ avec $a(4-a) - bc = 3$.

Exercice n° 3 : voir cours.

Exercice n° 4

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & & \\ a & 2a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & a \\ & & & a & 2a \end{vmatrix}.$$

En developpant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second determinant on obtient $\Delta_n = 2a\,\Delta_{n-1} - a^2\,\Delta_{n-2}$

On remarque que $\Delta_1 = 2a$, $\Delta_2 = 3a^2$ et avec un petit raisonnement par récurrence on montre que $\Delta_n = (n+1)a^n$.