Analyse III - Epreuve finale (Durée 02h)

Exercice 01 : 06 pts

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ le développement en série de Mac-Laurin de la fonction $f(x)$

tel que $\begin{cases} 2(n+1)a_{2n+2} = -a_{2n} \\ (n+2)a_{2n+3} = (n+1)a_{2n+1} \ \forall n \geq 0 \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$

1. Etablir que

   $\forall n \geq 0 \quad f^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^n n!}$ et $f^{(2n+1)}(0) = \frac{(2n+1)!}{n+1}$

2. Calculer le rayon de convergence et la somme $f(x)$ de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. Montrer que $\int_0^1 f(x)dx$ converge et donner sa valeur sous forme de série.

Exercice 02 : 04 pts

Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{1} \frac{tanx}{\sqrt[4]{-lnx(tan^4x-1)}}dx \quad ; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{cos3x\,dx}{(x^2+x)^{1/5}}$.

Exercice 03 : 10 pts

I. On considère la fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire et de période P = 2 π et telle que

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi & \text{si } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

1) Dessiner le graphe de f (On prendra au moins $x \in [-3\pi, 3\pi]$).
2) Montrer que la fonction f est développable en série de Fourier.
3) Calculer sa série de Fourier et montrer qu'elle converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Calculer les sommes : $S_1 = \sum_{n\geq1} \frac{1-cosn\frac{\pi}{2}}{n^2}$ et $S_2 = \sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n\left(1-cosn\frac{\pi}{2}\right)}{n^2}$,

en déduire les sommes $S_3 = \sum_{n\geq1} \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $S_4 = \sum_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$

II. On cherche une solution particulière $y = y(x)$ de l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y = f(x)$ telle que y soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et de période 2π.

1) Justifier que y est développable en série de Fourier de période 2π.
2) Soient $a_n(y) et\ b_n(y)\ les$ coefficients de Fourier de y et $a_n(y'') et\ b_n(y'')\ les$ coefficients de Fourier de y''.
3) Montrer que $a_n(y'') = -n^2 a_n(y)$ et $b_n(y'') = -n^2 b_n(y)\ \forall n \geq 1$.
4) Montrer que si y est solution de (E) alors $b_n(y) = 0\ \forall n \geq 1$ et

$$(2+n^2)a_n(y) = -a_n(f)\ \forall n \geq 0$$

où $a_n(f)\ sont\ les$ coefficients de Fourier de f. En déduire une solution particulière y de l'équation (E) sous forme de série de Fourier.

6) Question facultative : Ecrire la solution générale de(E).