U. A. B. T.
Département de Mathématiques

2015/2016

Corrigé de l'épreuve finale d'analyse numérique 1

Exercice 1

Soit $f \in C^4[a,b]$ et $x-h, x, x+h \in [a,b]$. On considère la différence centrée:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Obtenir l'ordre de cette approximation en utilisant les développements de Taylor appropriés.

Solution

On suppose que $h > 0$, comme $f \in C^4[a,b]$, les développements de Taylor s'écrivent:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_1), \qquad \xi_1 \in]x, x+h[$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_2), \qquad \xi_2 \in]x-h, x[$$

En additionnant membre à membre les égalités précédentes, nous obtenons la relation:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{4!}\left[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)\right], \qquad \xi_1, \xi_2 \in]x-h, x+h[$$

De plus, puisque $f^{(4)}$ est continue sur $]x-h, x+h[\subset [a,b]$, le théorème des valeurs intermédiares implique l'existence d'un ξ entre ξ_1 et ξ_2 tel que $\dfrac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)}{2} = f^{(4)}(\xi)$.

D'où la formule:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in]x-h, x+h[$$

Comme $f^{(4)}$ est continue sur $[x-h, x+h]$, alors elle est bornée sur $[x-h, x+h]$. On note $M = \max\limits_{x \in [x-h, x+h]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

On peut alors écrire:

$$\left|f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}\right| \leq \frac{h^2}{12}M$$

Il en découle que la formule proposée est d'ordre 2.

Exercice 2

Soit $f \in C^3[a,b]$ et $x_0, x_0+h, x_0+3h \in [a,b]$. A partir du polynôme d'interpolation de Newton, donner la formule d'approximation de $f'(x_0)$ en fonction de $f(x_0), f(x_0+h), f(x_0+3h)$. Estimer l'erreur de cette formule.

Solution

Le polynôme d'interpolation $p(x)$ passant par les points $(x_0, f(x_0)), (x_0+h, f(x_0+h))$, $(x_0+3h, f(x_0+3h))$ sous la forme de Newton s'écrit:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

avec $x_1 = x_0 + h$ et $x_2 = x_0 + 3h$.

en dérivant nous avons :

$$p'(x) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](2x - x_0 - x_1)$$

au point $x = x_0$

$$\begin{aligned}
p'(x_0) &= f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](x_0 - x_1) \\
&= f[x_0, x_1] - h\frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{3h} \\
&= \frac{4}{3}f[x_0, x_1] - \frac{1}{3}f[x_1, x_2] \\
&= \frac{4}{3}\frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{1}{3}\frac{f(x_2) - f(x_1)}{2h}
\end{aligned}$$

D'où

$$p'(x_0) = \frac{-8f(x_0) + 9f(x_0 + h) - f(x_0 + 3h)}{6h}$$

Le terme de l'erreur
On sait que:

$$f(x) - p(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Par dérivation on obtient:

$$\begin{aligned}
f'(x) - p'(x) &= \left[\frac{f'''(\xi_x)}{3!}\right]'(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\
&\quad + \frac{f'''(\xi_x)}{3!}\left[(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)\right]
\end{aligned}$$

Au point $x = x_0$, on a:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) - p'(x_0) &= \frac{f'''(\xi_{x_0})}{3!}(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \\
&= \frac{f'''(\xi_{x_0})}{2}h^2
\end{aligned}$$

Par suite, en posant $M = \max_{x \in [x_0, x_0+3h]} |f'''(x)|$ on a la borne de l'erreur absolue:

$$|f'(x_0) - p'(x_0)| \leq \frac{M}{2}h^2$$

Exercice 3
Déterminer le pas régulier h d'une table de la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, 1]$ de façon à ce que l'interpolation par un polynôme du second degré dans cette table ait une erreur inférieure à 10^{-5}.(donner seulement la formule pour h)
Solution
On suppose que le polynôme d'interpolation $p_2(x)$ passe par $(x_0, \sin x_0)$, $(x_0 + h, \sin(x_0 + h))$ et $(x_0 + 2h, \sin(x_0 + 2h))$.
Soit $x \in [x_0, x_0 + 2h]$,x s'ecrit: $x = x_0 + sh$, $s \in [0, 2]$.

L'erreur d'interpolation est:
$|f(x)-p_2(x)| = \left|\frac{f'''(\xi(x))}{3!}\right| |(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h)| = \left|\frac{f'''(\xi(x))}{3!}\right| |s(s-1)(s-2)|\, h^3$
On pose $g(s) = s(s-1)(s-2), \qquad s \in [0,2]$
$g'(s) = 3s^2 - 6s + 2 = 3\left(s - \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\left(s - \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$
d'où
$\max\limits_{s\in[0,2]} |g(s)| = \max\left\{\left|g(\frac{3+\sqrt{3}}{3})\right|, \left|g(\frac{3-\sqrt{3}}{3})\right|\right\} = \frac{2}{9}\sqrt{3}.$
De plus $f'''(x) = -\cos x \Rightarrow \forall x \in [0,1], |f'''(x)| \leq 1.$
Il en résulte:

$$|f(x)-p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{27}h^3$$

Pour avoir une erreur inférieure à 10^{-5}, on doit imposer

$$\frac{\sqrt{3}}{27}h^3 < 10^{-5}$$

ce qui donne

$$h < \sqrt[3]{\frac{27}{\sqrt{3}}10^{-5}}$$

De là: $h < 5.3819 \times 10^{-2}$

Exercice 4

Soit $f \in C^3[0,3]$.

1. Calculer le polynôme de Lagrange p_2 qui interpole f aux points $x_0 = 0, x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.
2. Déterminer la méthode de quadrature élémentaire obtenue en remplaçant l'intégrale de f sur $[0,3]$ par celle de p_2.
3. Quel est le degré de précision de la méthode?

Solution

1. $p_2(x) = f(0)l_0(x) + f(1)l_1(x) + f(3)l_2(x)$
   avec $l_0(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{3}, l_1(x) = -\dfrac{x(x-3)}{2}$ et $l_2(x) = \dfrac{x(x-1)}{6}$
2. $\int_0^3 p_2(x)dx = f(0)\int_0^3 l_0(x)dx + f(1)\int_0^3 l_1(x)dx + f(3)\int_0^3 l_2(x)dx$
   $\int_0^3 l_0(x)dx = \dfrac{1}{3}\int_0^3 (x-1)(x-3)dx = 0, \int_0^3 l_1(x)dx = -\dfrac{1}{2}\int_0^3 x(x-3)dx = \frac{9}{4}$ et
   $\int_0^3 l_2(x)dx = \dfrac{1}{6}\int_0^3 x(x-1)dx = \dfrac{3}{4}$
   D'où $\int_0^3 p_2(x)dx = \dfrac{9}{4}f(1) + \dfrac{3}{4}f(3) = Q(f)$

3. Le degré de précision de la quadrature

Si $f(x) = 1$, $\int_0^3 f(x)dx = 2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = Q(f)$

Si $f(x) = x$, $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 xdx = \frac{9}{2} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4}3 = Q(f)$

Si $f(x) = x^2$, $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 x^2dx = 9 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4}9 = Q(f)$

Si $f(x) = x^3$, $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 x^3dx = \frac{81}{4} \neq \frac{9}{2} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4}3 = Q(f)$

Le degré de précision de la quadrature est 2.

Exercice 5

1. Trouver le polynôme $p(x) = a+bx$ qui ajuste les données suivantes au sens des moindres carrés.

x	1	2	3	4
y	3	4	7	8

2. Soit $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Trouver le polynôme linéaire meilleur approximation de $f(x)$ au sens des moindres carrés sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Solution

1. le critère des moindres carrés s'écrit:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{4}(y_i - a - bx_i)^2$$

Les équations normales sont:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a}(a,b) = -2\sum_{i=1}^{4}(y_i - a - bx_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b}(a,b) = -2\sum_{i=1}^{4}x_i(y_i - a - bx_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b\sum_{i=1}^{4}x_i = \sum_{i=1}^{4}y_i \\ a\sum_{i=1}^{4}x_i + b\sum_{i=1}^{4}x_i^2 = \sum_{i=1}^{4}x_iy_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + 10b = 22 \\ 10a + 30b = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{9}{5} \end{cases}$$

d'où $p(x) = 1 - \frac{9}{5}x$

2. Le critères des moindres carrés continus s'ecrit:

$$F(a,b) = \int_{-1}^{1}(f(x) - a - bx)^2dx$$

Les équations normales sont:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = -2\int_{-1}^{1}(f(x) - a - bx)dx = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = -2\int_{-1}^{1}x(f(x) - a - bx)dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\int_{-1}^{1}dx + b\int_{-1}^{1}xdx = \int_{-1}^{1}f(x)dx \\ a\int_{-1}^{1}xdx + b\int_{-1}^{1}x^2dx = \int_{-1}^{1}xf(x)dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = \frac{20}{3} \\ \frac{2}{3}b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{10}{3} \\ b = -2 \end{cases}$$ Donc le polynôme cherché est: $p(x) = \frac{10}{3} - 2x$.