Université de Tlemcen. le 11/02/2016.
Département de mathématiques.

Epreuve finale de Algèbre 3

durée : 2 heures.

Exercice n° 1

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E, montrer que si f est diagonalisable, il existe un polynôme scindé, n'ayant que des racines simples et qui annulle f.

Exercice n° 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1°/ A est elle diagonalisable ?

2°/ Trigonaliser A et résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$

3°/ Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, mettre sous forme de Jordan B et calculer B^n.

Exercice n° 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}$.

1°/ Pour quelles valeurs de a, A est elle diagonalisable ?

2°/ Lorsque A est diagonalisable, déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et une matrice A' diagonale telles que $A' = P^{-1}AP$.

Exercice n° 4

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriels des matrices réelles d'ordre 2 à trace nulle, c'est à dire $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

1°/ Déterminer une base β de $\mathcal{E}$

2°/ Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ défini par :

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$M \longmapsto f(M) = M.B - B.M$$

Déterminer $C = M(f)_\beta$, C^n et $f^n(A)$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

Exercice n° 5

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $\begin{cases} f^3 - 3f^2 + 2f = 0 \\ f^8 + 16f^4 = 0 \end{cases}$

Déterminer $m_f(x)$ et que peut-on en déduire pour f.

Barème : Ex1 : 3,5pts ; Ex2 : 6,5pts ; Ex3 : 3pts ; Ex4 : 5,5pts ; Ex5 : 2,5pts Total = 21pts.

Bon Courage

Corrigé de l'épreuve finale de Algèbre 3

Exercice n° 2

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(f)_{e_i}$; $P_f(\lambda) = -(\lambda-1)^3 \Rightarrow P_f(x)$ est scindé dans $\mathbb{R} \Rightarrow m_f(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{R}$

1/ A est diagonalisable $\overset{?}{\Leftrightarrow} m_A(X) = (\lambda - 1) \overset{?}{\Leftrightarrow} m_A(A) = 0 \Leftrightarrow A - I = 0 \Leftrightarrow A = I$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq I \Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable.

2/ $P_f(X)$ est scindé sur $\mathbb{R} \Rightarrow \exists \{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3 / M(f)_{v_i} = \begin{array}{c|ccc} & f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ \hline v_1 & 1 & a & b \\ v_2 & 0 & 1 & c \\ v_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

Détermination de v_1

① $f(v_1) = v_1 \Rightarrow (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$z = 1 \neq 0$, le système est compatible, on pose $y = \alpha$ et $z = \beta \Rightarrow x = -\alpha + \beta$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solution de ① $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$.

on choisit $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\alpha = 1, \beta = 0)$

Détermination de v_2.

$f(v_2) - v_2 = a v_1$, on peut prendre $a = 0$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\alpha = 0, \beta = 1)$.

Détermination de v_3

$f(v_3) - v_3 = b v_1 + c v_2$, choisissons $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et déterminons b et c.

$(A - I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b + c \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

Conclusion : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A' = P^{-1} A P$.

3/ $\frac{dX'}{dt} = A'X' \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt} \\ \frac{dy'}{dt} \\ \frac{dz'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx'}{dt} = x' - z' \Rightarrow \frac{dx'}{dt} - x' = -c_3 e^t \\ \frac{dy'}{dt} = y' + z' \Rightarrow \frac{dy'}{dt} - y' = c_3 e^t \\ \frac{dz'}{dt} = z' \Rightarrow z' = c_3 e^t \end{cases}$

En utilisant la méthode de la variation de la constante on trouve

$y' = (c_2 + c_3 t)e^t$, $x' = (c_1 - c_3 t)e^t$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -(c_1 - c_3 t)e^t + (c_2 + c_3 t)e^t + c_3 e^t \\ y = (c_1 - c_3 t)e^t \\ z = (c_2 + c_3 t)e^t \end{cases}$

3°/ $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix} \Rightarrow P_B(\lambda) = -(\lambda-2)^3 \Rightarrow m_B(\lambda) = \begin{cases}(\lambda-2)\\ \text{ou}\\ (\lambda-2)^2 \\ \text{ou} \\ (\lambda-2)^3\end{cases}$

$m_B(\lambda) = \lambda - 2 \iff B - 2I = 0 \iff B = 2I$ Non car $B \neq 2I$.

$m_B(\lambda) = (\lambda-2)^2 \overset{?}{\iff} (B-2I)(B-2I) = (0)$.

$(B-2I)(B-2I) = \begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow m_B(\lambda) = (\lambda-2)^2$

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix}\boxed{-2}&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$ $\delta = -2 \neq 0$, le système est compatible.

on pose $y = 2\alpha$ et $z = \beta \Rightarrow -2x = -2\alpha$
$\Rightarrow x = \alpha$.

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}_{W_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{W_2} \Rightarrow \dim E_2 = 2$

Th Jordan
$\Rightarrow$ il existe $\{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ telle que $M(f)_{v_i} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2&1\\0&2\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0&0\end{matrix} & \boxed{2} \end{pmatrix} \end{array} = A'$

Détermination de v_1 : $f(v_1) = 2v_1 \Rightarrow (B-2I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ déjà fait, W_1 et W_2 ne conviennent pas après, on choisit $v_1 = W_1 + W_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Détermination de v_2 : $f(v_2) - 2v_2 = v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix}\boxed{-2}&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

$\delta = -2 \neq 0 \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix}-2&1\\-4&2\end{vmatrix} = 0$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix}-2&1\\-2&1\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ le système est compatible.

on pose $y = \alpha$ et $z = \beta \Rightarrow -2x = -\alpha + 1$ pour $\alpha = 0$ $v_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$

Détermination de v_3 : $f(v_3) = 2v_3 \Rightarrow f(v_3) - 2v_3 = 0$ on prend $v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\2&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ et $B' = P^{-1}BP \Rightarrow B^n = PB'^nP^{-1}$.

$B'^n = \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}^n & 0 \\ 0\;0 & 2^n\end{pmatrix}$ après calcul on trouve $B'^n = \begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1} & 0\\0&0&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$ et $B^n = 2^n\begin{pmatrix}-n & n+1 & 0\\-2n & n+1 & 0\\-n & \frac{n}{2} & 1\end{pmatrix}$

avec $P^{-1} = \begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-2&1&0\\0&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$.

Exercice n°3 $P_A(X) = X^2 - (1+a)X + a$.

$\Delta = (1+a)^2 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$

$a \neq 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow P_A(x)$ admet 2 racines distincts

$\Rightarrow A$ est diagonalisable.

$a=1 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1+a}{2} = 1$ est une racine double.

$\Rightarrow P_A(X) = (X-1)^2$.

A est diagonalisable $\Leftrightarrow m_A(X) = (X-1) \Leftrightarrow m_A(A) = 0$

$\Leftrightarrow (A-I) = 0 \Leftrightarrow A = I$ (impossible)

Donc pour $a=1$ A n'est pas diagonalisable.

Conclusion

A est diagonalisable $\forall a \neq 1$.

2°). Si $a \neq 1$ il y a 2 valeurs propres $X_1 = 1$ et $X_2 = a$.

$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 \\ -a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\delta = -1 \neq 0$ Syst comp.

on pose $y = \alpha \Rightarrow x = \alpha$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on prend $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \boxed{-a} & 1 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\delta = -a \neq 0$ syst comp.

on pose $y = a\alpha \Rightarrow x = \alpha$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_a \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ on prend $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$

Conclusion

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ et } A' = P^{-1}AP.$$

Exercice n°4

1°/ $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{E_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2}$.

$\Rightarrow \{E_1, E_2, E_3\}$ est une fam. génératrice de $\mathcal{E}$, elle est évidement libre

donc $\beta = \{E_1, E_2, E_3\}$ est une base de $\mathcal{E}$.

2°/
$$C = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(E_1) & f(E_2) & f(E_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$f(E_1) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 - 4E_3$.

$f(E_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2E_1 + 2E_2 + 0E_3$

$f(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 - 2E_1$

$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_C(X) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda+2) \Rightarrow P_C(\lambda)$ a 3 val propres distincts $\Rightarrow C$ est diagonalisable $\Rightarrow C = PC'P^{-1}$

Après calcul on trouve $C^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(-1)^n & -(1+(-1)^n) & (-1)^n \end{pmatrix}$

$M(f^n(A))_{\{E_i\}} = M(f^n)_{\{E_i\}} \times M(A)_{\{E_i\}} = C^n \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 2a(-1)^n - b(1+(-1)^n) + c(-1)^n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f^n(A) = bE_1 + bE_2 + \left[2a(-1)^n - b(1+(-1)^n) + c(-1)^n\right]E_3.$$

$$\Rightarrow f^n(A) = \begin{pmatrix} b & & b \\ 2a(-1)^n - b(1+(-1)^n) + c(-1)^n & & -b \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice n° 5</u>

$f^3 - 3f^2 + 2f = 0 \Rightarrow Q(X) = \cancel{3}X^3 - 3X^2 + 2X$ est un polynôme annulateur de f.

$f^8 + 16f^4 = 0 \Rightarrow P(X) = X^8 + 16X^4$ est un polynôme annulateur de

$\Rightarrow Q(X) = X(X-1)(X-2)$ et $P(X) = X^4(X^4+16)$ sont des polynômes annulateurs or on sait que $m_f(X)$ divise tous les polynômes annulateurs de f, donc $m_f(X)$ doit diviser $Q(X)$ et $P(X)$.

$\Rightarrow m_f(X)$ est le PGCD de $Q(X)$ et $P(X)$ par conséquent.

$$m_f(X) = X$$

Comme $m_f(f) = 0$ on déduit que $f = 0$.

<u>Exercice n° 1</u>

Voir cours.