UABT
Département de Mathématiques 03/12/15
Analyse III

Contrôle continu (durée 02h)

Exercice 1 : 06 pts

Etudier la nature et calculer éventuellement la somme des séries :

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n+\sqrt{n+1}-3\sqrt{n}}{3^{n+1}}$ 2) $\sum_{n\geq 1}\left(lnn.\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)$ 3) $\sum_{n\geq 1}\sin\left(\pi\sqrt[3]{n^3+(-1)^n n}\right)$

Exercice 2 : 04 pts

1. Développer en série entière autour de l'origine la fonction $f(x) = arctanx$
   Préciser son rayon et son domaine de convergence . En déduire la somme $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$
2. En utilisant $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ calculer la somme S de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$
3. Combien faut–il prendre de termes dans la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ pour avoir S à $(10)^{-3}$prés et préciser si c'est une valeur approchée par excès ou par défaut.

Exercice 03 : 10 pts

A. Soit la suite de fonctions définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(x) = \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}\ \ x \in \mathbb{R}^*\ et\ f_n(0) = 0.$
   1. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $\left(f_n(x)\right)_n$ dans $\mathbb{R}$.
   2. Déterminer le plus grand intervalle de convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$.

B. On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}\ x \in \mathbb{R}\ et\ n \in \mathbb{N}^*$.
   1. Trouver le domaine de convergence D_c de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$.
   2. Etudier la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ sur D_c.
   3. Montrer que la somme $\mathrm{S}(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)\ \ est\ une\ fonction\ \ continue\ sur\ D_c$.

$Etablir\ que\ \ lim_{x\to+\infty}$ $\mathrm{S}(x) = 0$ et $lim_{x\to 0}$ $\mathrm{S}(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$

$\forall x > 0$, on pose $v_n(x) = \left(u_n(x)\right)'$ et $w_n(x) = \left(v_n(x)\right)'$

   4. Montrer que : $\forall x > 0\ \ \sum_{k\geq n+1} w_k(x) = f_n(x)$, en déduire la dérivabilité de la série $\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ et de la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ sur $[a, +\infty[\ \forall a > 0$.
   5. On pose $\mathrm{W}(x) = \sum_{n\geq 0} w_n(x)$ et $\mathrm{V}(x) = \sum_{n\geq 0} v_n(x)$, calculer $\mathrm{W}(x)\ \forall x > 0$ puis $\mathrm{V}(x)\ \forall x > 0$. ($remarquer\ que\ \ lim_{x\to+\infty}$ $\mathrm{V}(x) = 0$)
   6. Etudier les variations de la fonction $\mathrm{S}(x)$ et tracer son graphe. ($\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}64$)
   7. Montrer que $\forall x > 0\ \ \mathrm{S}(x) = \int_0^{e^{-x}} -\frac{ln(1-u)}{u}du$ et justifier que
      $\int_0^1 -\frac{ln(1-u)}{u}du = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$. (Rem : on ne demande pas de calculer les intégrales)

☺ Question facultative : En utilisant le développement en série entière de $\frac{ln(1-u)}{u}$ retrouver le résultat dans 7 .

Bon Courage !

Exercice 01 :06 pts

1. **02pts**

$u_n = \frac{(-1)^n+\sqrt{n+1}-3\sqrt{n}}{3^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} + \left(\frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{3^n}\right) = b_n + c_n.$

$\sum_{n\geq 0} b_n = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0} q^n$: *série géom. avec* $|q| = \left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, *donc elle converge* .

$\sum_{n\geq 0} b_n = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.$

$\sum_{n\geq 0} c_n = \sum_{n\geq 0}(a_{n+1} - a_n)$: *série télésc. avec* $a_n = \frac{\sqrt{n}}{3^n} \to 0$ *qd* $n \to +\infty$, *donc converge*.

$S_n = \sum_0^n c_k = -a_0 + a_{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0 = \sum_{n\geq 0} c_n$

Conclusion $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge* et a pour somme S = $\frac{1}{4}$.

2. **02pts**

$u_n = \left(lnn.\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right) = R_{n-1} lnn$ avec $R_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ d'après le critère de comparaison avec l'intégrale :

- f(x)= $\frac{1}{x^2}$ $x \geq 2$, f est positive ,décroissante et continue .
- $\int_n^{+\infty} \mathrm{f(x)} = \int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{\mathrm{x}}\right]_{\mathrm{n}}^{+\infty} = \frac{1}{n}$

Ainsi $R_{n-1} \sim \frac{1}{n}$ d' où $u_n \sim \frac{lnn}{n} \geq \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 3$ *alors* $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

3. **02pts**

$u_n = \sin\left(\pi\sqrt[3]{\mathrm{n}^3 + (-1)^{\mathrm{n}}\mathrm{n}}\right) = \sin\left(\pi\,\mathrm{n}\left(1 + \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}^2}\right)^{1/3}\right).$

$= \sin\left(\pi\,\mathrm{n}\left(1 + \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{3\mathrm{n}^2} + \mathrm{o}\left(\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{3\mathrm{n}^2}\right)\right)\right) = cos\pi\,\mathrm{n}.\sin\left(\pi\left(\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{3\mathrm{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{3\mathrm{n}}\right)\right)\right).$

$=(-1)^{\mathrm{n}}\sin\left(\pi\left(\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{3\mathrm{n}}(1+\mathrm{o}(1))\right)\right)=(-1)^{\mathrm{n}}\pi\left[\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{3\mathrm{n}}(1+\mathrm{o}(1)) + \mathrm{o}\left(\pi\left(\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{3\mathrm{n}}(1+\mathrm{o}(1))\right)\right)\right]$

$u_n = \frac{\pi}{3\mathrm{n}}(1+\mathrm{o}(1)) \sim \frac{\pi}{3\mathrm{n}}.$

alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

Exercice 02 : 04 pts

1. **02pts**

$f(x) = arctanx\,;\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^{\mathrm{n}}x^{2n}\quad |x| < 1$ R=1

$f(x) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \sum_{n\geq 0}(-1)^{\mathrm{n}}t^{2n}\,dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^{\mathrm{n}}\int_0^{\mathrm{x}} t^{2n}\,dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^{\mathrm{n}}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

son rayon de convergence est le même que celui de la série dérivée ie R=1.
Pour x= ± 1,on obtient une série alternée convergente. Le domaine de convergence est alors $D_c = [-1,1]$. On déduit d'après le second lemme d'Abel :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{2n+1} = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} arctanx = \frac{\pi}{4}.$$

2. **01pt**

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{4\mathrm{n}^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{2n+1} - \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{2n-1} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{2n+1} - \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{2n-1}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - 1 - \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{\mathrm{n}+1}}{2n+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

3. **01pt** Le reste R_n de la série (alternée) $\sum_{k\geq n+1}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}$ vérifie :
$|R_n| \leq \frac{1}{4(n+1)^2-1} \leq (10)^{-3}$ pour $n\geq 15$. Le signe de R_{15} est le même que celui de son premier terme (u_{16})qui est positif ainsi
S_{15} est une valeur approchée par défaut de la somme S à $(10)^{-3}$prés .

<u>Exercice 03 :</u> 10 **pts**

A. 02pts

1) La convergence simple :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\begin{cases}0 & si\ x\geq 0\\ -\infty & si\ x<0\end{cases}$$

La convergence uniforme :

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)\nrightarrow 0 \Rightarrow \quad \|f_n\|\nrightarrow 0$$

$pas\ de\ C.Uniforme\ sur\ [0,+\infty[$

$$2)\begin{cases}|f_n(x)|=\frac{e^{-nx}}{n^2}\leq e^{-na}\ \forall x\geq a>0\\ \sum_{n\geq 0}e^{-na}=\sum_{n\geq 0}(e^{-a})^n\ cv\\ série\ géom.\ 0<q=e^{-a}<1\end{cases}\Rightarrow f_n\rightrightarrows 0\ sur\ [a,+\infty[\ \forall a>0.$$

B. **08pts**

1) 01pt

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=e^{-x}\begin{cases}si\quad x>0\quad ,\quad e^{-x}<1 & \Rightarrow \sum_{n\geq 0}u_n(x)\ \ CV\\ si\ x<0,\quad u_n\ +\infty\Rightarrow u_n\nrightarrow 0 & \Rightarrow \sum_{n\geq 0}u_n(x)\ \ dV\\ si\ x=0 & u_n(0)=\frac{1}{n^2},\sum_{n\geq 0}u_n(0)\ \ CV\end{cases}$$

Alors $D_c = [0,+\infty[$

2) 0.5pt Convergence Normale :

$\|u_n\| = \sup_{x\geq 0}|u_n(x)| = u_n(0) = \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 0}\|u_n\|$ CV alors

$\sum_{n\geq 0}u_n(x)$ CN donc CU sur D_c.

3) 01,25pts

i. $\begin{cases}\forall n\in N,\ u_n(x)\ est\ continue\ sur\ D_c\\ \sum_{n\geq 0}u_n(x)\text{ CU sur }D_c\end{cases}\Rightarrow S(x)=\sum_{n\geq 0}u_n(x)\ est\ continue\ sur\ D_c.$

ii. Ainsi $lim_{x\to+\infty}\ S(x) = lim_{x\to+\infty}\sum_{n\geq 1}u_n(x) =$

$=\sum_{n\geq 0}\ lim_{x\to+\infty}u_n(x) = \sum_{n\geq 1}0 = 0$ et

$lim_{x\to 0}\ S(x) = lim_{x\to 0}\sum_{n\geq 1}u_n(0) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4) 02.5pts

$\forall x > 0 \quad v_n(x) = u'_n(x) = -\frac{e^{-nx}}{n} \quad et \ \ w_n(x) = v'_n(x) = e^{-nx}$

$\forall x > 0 \quad R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} w_k(x) = \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} = f_n(x)$.

On déduit la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 0} v'_n(x)$ $sur\ [a,+\infty[\ \forall a > 0$ d'où d'après le théorème de convergence uniforme & $dérivablité, on\ obtient$:

i. la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ $sur\ [a,+\infty[\ \forall a > 0$

ii. la dérivabilité de la série $\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ sur $[a,+\infty[\ \forall a > 0\ donc\ \forall x > 0\ et$

$\mathrm{W}(x) = \sum_{n\geq 0} w_n(x) = \sum_{n\geq 0} v'_n(x) = \mathrm{V}'(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \quad \forall x > 0.$

D'après i. et le théorème de convergence uniforme & $dérivablité, sachant\ que\ v_n(x) = u'_n(x)$ on déduit la dérivabilité de la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ $\forall x > 0$ et

$\mathrm{V}(x) = \sum_{n\geq 0} v_n(x) = \sum_{n\geq 0} u'_n(x) = S'(x) \ \ \forall x > 0$.

$(\quad lim_{x\to+\infty} \mathrm{V}(x) = \sum_{n\geq 0} \quad lim_{x\to+\infty} -\frac{e^{-nx}}{n} = 0)$

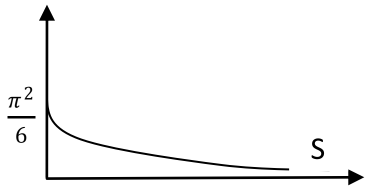
5) **01.5pts**

$\mathrm{V}(x) - \mathrm{V}(a) = \int_a^x \mathrm{V}'(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \int_a^x \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\mathrm{dt} = \int_{e^{-a}}^{e^{-x}} \frac{-du}{1-u} = ln\left(\frac{1-e^{-x}}{1-e^{-a}}\right) \ \forall a > 0, \forall x > 0$

$lim_{a\to+\infty}(\mathrm{V}(x) - \mathrm{V}(a)) = \quad lim_{a\to+\infty}\ ln\left(\frac{1-e^{-x}}{1-e^{-a}}\right) = ln(1-e^{-x})$

D'où $\forall x > 0 \quad \mathrm{V}(x) = ln(1-e^{-x}) = S'(x)$

6) 0.5**pts** $\forall x > 0 \quad S'(x) < 0$ alors la fonction est strictement décroissante d'où le graphe de S.



7) 0.75pt

$\mathrm{S}(x) - S(a) = \int_a^x \mathrm{S}'(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \int_a^x \mathrm{V}(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \int_a^x ln(1-e^{-t})\mathrm{dt} = \int_{e^{-a}}^{e^{-x}} \frac{-ln(1-u)du}{u}$

$lim_{a\to+\infty} S(a) = 0$

$lim_{a\to+\infty}(\mathrm{S}(x) - S(a)) = lim_{a\to+\infty} \int_{e^{-a}}^{e^{-x}} \frac{-ln(1-u)du}{u} = \int_0^{e^{-x}} \frac{-ln(1-u)du}{u}$

Ainsi : $\mathrm{S}(x) = \int_0^{e^{-x}} \frac{-ln(1-u)du}{u}$

<u>Question facultative</u> :**01pts**

$\frac{-ln(1-u)}{u} = \frac{1}{u}\sum_{n\geq 1}\frac{u^n}{n} = \sum_{n\geq 1}\frac{u^{n-1}}{n} \quad |u| < 1\ et\ .\ \forall x > 0\ ,\ 0 < e^{-x} < 1$ et

$\int_0^{e^{-x}} \frac{-ln(1-u)du}{u} = \int_0^{e^{-x}} \sum_{n\geq 1}\frac{u^{n-1}}{n}\ du = \sum_{n\geq 1}\int_0^{e^{-x}} \frac{u^{n-1}}{n}du = \sum_{n\geq 1}\frac{e^{-nx}}{n^2} = \mathrm{S}(x).$