U. A. B. T. 2014/2015

Département de Mathématiques

Contrôle continu d'analyse numérique 1(corrigé)

Exercice 1 (3 points)

Soit $f(x) = \ln x$ et $x_0 = 1$. Soit le polynôme de Taylor $p_n(x)$ de degré n de la fonction $f(x)$ au voisinage de x_0.

1. Trouver le polynôme de Taylor $p_2(x)$.

2. Utiliser $p_2(x)$ pour approcher $\ln(1.1)$. Puis trouver une borne de l'erreur de cette approximation.

3. Quelle est la valeur de n nécessaire pour approcher $f(x)$ à 10^{-4} près sur $[1,2]$?

Solution

1. $p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f(x_0) = 0, f'(x) = (x)^{-1} \Rightarrow f'(x_0) = 1, f''(x) = -(x)^{-2} \Rightarrow f''(x_0) = -1$

d'où $p_2(x) = (x-1) - \dfrac{1}{2!}(x-1)^2$

2. $p_2(1.1) = 0.1 - \dfrac{1}{2!}(0.1)^2 = 0.095$

$f(x) - p_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(0.1)^3$, avec $\xi \in (1, 1.1)$, $f^{(3)}(\xi) = 2(\xi)^{-3} \Rightarrow \left|f^{(3)}(\xi)\right| \leq 2, \forall \xi \in (1, 1.1)$

$\Rightarrow |f(x) - p_2(x)| = \frac{0.001}{3} = 3.3333 \times 10^{-4}$

3. $|f(x) - p_n(x)| = \dfrac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \forall x \in [1,2]$

Or $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = n!x^{-(n+1)} \leq n!$ et $(x-1)^{n+1} \leq 1, \forall x \in [1,2]$

donc $|f(x) - p_n(x)| \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{1}{n+1} \leq 10^{-4} \Rightarrow n+1 \geq 10^4 \Rightarrow n \geq 10^4 - 1 = 9999$

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction $f(x) = e^x - 4x^2$.

1. Montrer qu'il existe un zéro α pour la fonction f dans $[4,5]$ et qu'il est unique.

2. Montrer que la méthode du point fixe $x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ ne converge pas vers α.

3. Déterminer une méthode de point fixe qui converge vers α. Justifier.

4. Cette équation admet aussi une racine entre $x = 0$ et $x = 1$.Montrer que la méthode du point fixe $x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ converge vers cette racine si x_0 est choisi dans l'intervalle $[0,1]$.

On donne les valeurs suivantes: $e^{0.5} = 1.6487, e^1 = 2.7183, e^2 = 7.3891$, $e^4 = 54.5982$, $e^5 = 148.4132$.

Solution

1. f est une fonction continue sur $[4,5]$ avec $f(4) = e^4 - 64 < 0$ et $f(5) = e^5 - 100 > 0$, Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de α dans $[4,5]$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus $f'(x) = e^x - 8x > 0$, $\forall x \in [4,5]$ alors f est strictement croissante dans $[4,5]$ et α est unique.

2. $\forall x \in [4,5], f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 4x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$.On pose $g(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $g'(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}$, $g'(x)$ étant positive et croissante alors $|g'(x)| \geq g'(4) = \frac{7.3891}{4} > 1, \forall x \in [4,5]$ et donc la méthode ne converge pas vers α.

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 4x^2 \Leftrightarrow x = \ln(4x^2) = 2\ln(2x)$. On pose $g_1(x) = 2\ln(2x) \Rightarrow g_1'(x) = \dfrac{2}{x}$

De plus $\forall x \in [4,5], |g_1'(x)| \leq \frac{1}{2} < 1$ alors la méthode de point fixe définie par la fonction d'itération g_1 converge vers α.
4. La fonction g est une fonction croissante sur $[0,1]$,avec $g(0) = \frac{1}{2}, g(1) = \frac{e^{0.5}}{2} < 1$ alors $g([0,1]) \subset [0,1]$.
Comme $\max\limits_{x\in[0,1]} |g'(x)| = \frac{e^{0.5}}{4} < 1$ alors $\forall x_0 \in [0,1]$,la méthode du point fixe $x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ converge vers la racine de $f(x)$ dans l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 3 (5 points)

1. Donner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définissant la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$, avec $f \in C^1$ et f' ne s'annule pas. Justifier géométriquemet l'expression de cette suite.
2. Quel est l'ordre de convergence de la méthode?Justifier, en utilisant un développement de Taylor approprié à la fonction f Y a-t-il des situations dans lesquelles l'ordre de convergence est plus élevé?
3. On veut approcher la racine $\alpha = 0$ de $f(x) = x^2$. On utilise la fonction d'itération $g(x) = x - a\frac{f(x)}{f'(x)}$ avec a un paramètre réel. Pour quelles valeurs de a a t-on une convergence locale? Etudier l'ordre de convergence en fonction de a.

Solution

1. La suite de Newton est définit par: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, & n \geq 0 \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$

Géométriquement, x_{n+1}est le point d'intersection de la tangente à la courbe de f passant par $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe des abscisses.
2. Soit α la racine de f alors la formule de Taylor dans un voisinage de x_n s'écrit:
$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2$, avec ξ_n entre x_n et x.
Pour $x = \alpha$ on a:
$0 = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2$,avec ξ_n entre x_n et α.
Comme f'ne s'annule pas, en divisant par $f'(x_n)$ on obtient:
$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \alpha - x_n + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$
Ce qui s'écrit:
$x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$,avec ξ_n entre x_n et α.
d'où $\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left|\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right|$
L'ordre de convergence sera plus élevé si $f''(\alpha) = 0$.
3. $g(x) = (1 - \frac{a}{2})x \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{a}{2}$. Nous avons une convergence locale si $\left|1 - \frac{a}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 4$
Pour $a \in]0,4[$ et $a \neq 2$, la convergence est linéaire. Si $a = 2$ alors $g'(x) = g''(x) = \cdots = g^{(n)}(x) = 0, \forall n \geq 1$.
L'ordre de convergence est aussi grand que l'on veut $(g(x) = 0)$.

Exercice 4 (4 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Attention une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
1. Si une fonction continue f admet un zéro entre -10 et 10, alors si $x_0 \in [-10,10]$ la méthode de Newton engendre une suite qui converge vers le zéro de f .

Faux

la méthode de Newton converge pour x_0 choisi dans un voisinage de la solution

2. La méthode de Newton converge plus vite que la méthode de bissection pour le calcul de la racine de $f(x) = (x-1)e^x$.

Vraie

$f'(x) = xe^x \Rightarrow f'(1) = e \neq 0$,alors 1 est un zéro simple de $f(x)$

d'où la méthode de Newton converge quadratiquement.

La méthode de bissection a une convergence linéaire

Donc la méthode de Newton converge plus vite que la méthode de bissection

3. Lorsqu'un nombre relativement grand est multiplié par un nombre relativement petit on risque une erreur d'annulation.

Faux

L'erreur d'annulation est dûe à une soustraction de deux nombres proches

4. Soit $g(x)$ une fonction continue sur $[a,b]$, on suppose que g satisfait à la propriété suivante: $a \leq x \leq b$ implique $a \leq g(x) \leq b$, alors la fonction g admet un unique point fixe dans $[a,b]$.

Faux

Soit la fonction $g(x) = x^2$pour $x \in [-1,1]$

$g(x)$ est une fonction continue sur $[-1,1]$ et $\forall x \in [-1,1], g(x) \in [0,1] \subset [-1,1]$

pourtant g admet deux points fixes $x=0$ et $x=1$ dans $[-1,1]$.

5. L'approximation d'une série par ses trois premiers termes est un exemple d'erreur d'absorption.

Faux

L'approximation d'une série par ses trois premiers termes est un exemple d'erreur de troncature

L'erreur d'absorption est dûe à l'addition de deux termes dont l'ordre de grandeur est très différent.

Exercice 5(3points)

Pour les expressions suivantes, identifier la source potentielle d'erreur puis proposer une autre façon de l'évaluer.

1. $\frac{1}{1-\sin x} - \frac{1}{1+\sin x}$

2. $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{10000^4}$

3. $\frac{1-\cos x}{\sin x}$

Solution

1. Si x est proche de 0, nous risquons une erreur d'annulation. Pour l'éviter nous calculons autrement l'expression:

$$\frac{1}{1-\sin x} - \frac{1}{1+\sin x} = \frac{2\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}$$

2. Nous risquons une erreur d'absorption dûe à l'addition de deux termes dont l'ordre de grandeur est très différent, pour l'éviter nous calculons la somme du plus petit terme vers le plus grand.

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{10000^4} = \frac{1}{10000^4} + \cdots + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^4} + 1$$

3. Si x est proche de 0, nous risquons une erreur d'annulation. Pour l'éviter nous calculons autrement l'expression:

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$