Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math
1ière Année LMD-MI
Durée : 01 h 30mn

Année Universitaire 2015/2016

ÉPREUVE DE RATTRAPAGE
Mécanique

Exercice 1: (6pts)
Soit le pendule simple formé d'une boule (sphère) de rayon R et de masse m. L'étude de l'effet de l'air sur ce pendule montre que sa période dépend d'une constante k, du coefficient de viscosité de l'air η, du rayon de la boule R et de sa masse volumique ρ .

1-Trouvez l'expression de la période en la supposant de la forme :

$$T = K\eta^x R^y \rho^z \text{ avec } [\eta] = ML^{-1}T^{-1}$$

2- Déterminez l'incertitude relative sur T en fonction de $\Delta\eta, \Delta R, \Delta m$.

Exercice 2: (8pts)
Dans un plan Oxy, on considère un système d'axes mobiles OXY, de même origine O, tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω (Figure 1). Un point mobile sur l'axe OX est repéré par : $|\overrightarrow{OM}| = r = r_0(1 + \sin\omega t)$

Ou r_0 est une constante positive (on donne $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,\vec{U}_r$)

Calculer dans le repère mobile (coordonnée polaire) :

1) La vitesse et l'accélération relatives de M.
2) La vitesse et l'accélération d'entraînement de M.
3) Accélération de Coriolis.
4) En déduire sa vitesse et son accélération absolues.

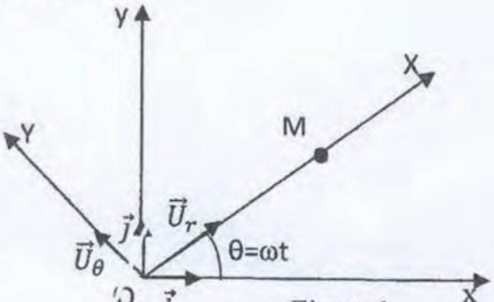


Figure 1

Exercice 3: (6pts)
Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes :
$$\begin{cases} x(t) = r_0\cos(\omega t) \\ y(t) = r_0\sin(\omega t) \end{cases}$$
Avec r_0 et ω des constantes.
Trouver :

1. L'équation de la trajectoire.
2. Les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération.
3. La nature du mouvement.
4. Les accélérations tangentielle et normale.
5. Le rayon de courbure R.

Bon courage

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math
1[ière] Année LMD-MI
Durée : 01 h 30mn

Année Universitaire 2015/2016

Corrigé d'examen du rattrapage
Mécanique

Exercice 1: (6pts)

1- $T = K\mu^x R^y \rho^z$ avec $\begin{cases} [\mu] = ML^{-1}T^{-1} \\ [R] = L \text{ (0.25pts)} \\ [\rho] = ML^{-3} \text{(0.25pts)} \\ [T] = T \text{(0.25pts)} \\ [K] = 1 \text{(0.25pts)} \end{cases}$

$\Longrightarrow [T]=T=(ML^{-1}T^{-1}).L^y.(ML^{-3}) = M^{x+z} . L^{-x-3z+y} . T^{-x}$ (0.5pts)

$\Longrightarrow L^0.M^0. T^1 = M^{x+z} . L^{-x-3z+y} . T^{-x}$ (0.5pts)

$$\Longrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ -x = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{(0.25pts)} \\ y = 2 \text{(0.25pts)} \\ z = 1 \text{(0.25pts)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow T = K\mu^{-1}R^2\rho^1 = \frac{K\rho R^2}{\mu} \quad \text{(0.25pts)}$$

2- l'incertitude relative sur T= f($\Delta\eta, \Delta R, \Delta m$) ?

$T = \frac{K\rho R^2}{\mu}$ avec $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3m}{4\pi R^3}$ (0.25pts) d'où $T = \frac{3Km}{4\pi R\mu}$ (0.75pts)

$$\Longrightarrow \log T = \log\left(\frac{3mK}{4\pi R\mu}\right) = log 3K + \log(m) - \log(4\pi) - \log(R) - \log(\mu) \quad \text{(0.75pts)}$$

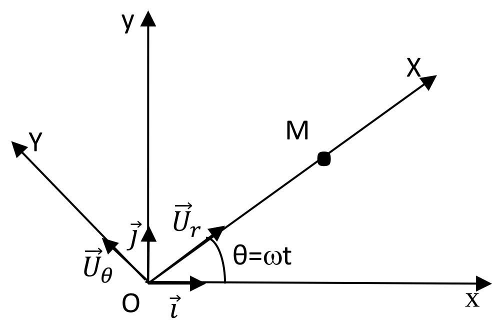
$$\Longrightarrow \frac{dT}{T} = \frac{dm}{m} - \frac{dR}{R} - \frac{d\mu}{\mu} \quad \text{(0.5pts)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta T}{T} = \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{\Delta R}{R}\right| + \left|\frac{\Delta \mu}{\mu}\right| \quad \text{(0.25pts)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta \mu}{\mu} \quad \text{(0.5pts)}$$

<u>Exercice 2</u>: (8pts)

Un point mobile sur l'axe OX est repéré par :



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} = r.\overrightarrow{U_r} = r_0(1 + \sin\omega t).\overrightarrow{U_r}$ (0.25pts)

On a $\begin{cases} \overrightarrow{oo'} = \vec{0} \text{(0.25pts)} \\ \vec{\omega} = \omega \overrightarrow{U_z} \text{ (0.25pts)} \\ \dfrac{d\omega}{dt} = 0 \text{(0.25pts)} \end{cases}$

1- a) **La vitesse relative** : (1pts)

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(R')$$

O' est confondu avec O alors : $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'M} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/(R')$

$$\overrightarrow{v_r} = r_0\omega(\cos\omega t)\,\overrightarrow{U_r}$$

b) **L'accélération relative :** (1pts)

$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/(R')$ avec $\overrightarrow{v_r} = r_0\omega(\cos\omega t)\,\overrightarrow{U_r}$

Donc $\overrightarrow{a_r} = -r_0\omega^2(\sin\omega t)\,\overrightarrow{U_r}$

2- b) **La vitesse d'entrainement :** (1pts)

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_r} & \overrightarrow{U_\theta} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega\, r\, \overrightarrow{U_\theta} \quad Donc$$

$$\overrightarrow{v_e} = \omega\, r\, \overrightarrow{U_\theta} = \omega\, r_0(1 + \sin\omega t)\,\overrightarrow{U_\theta}$$

b) **L'accélération d'entrainement** (1pts)

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0} \text{ car } \omega \text{ constante} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$$

Et $\vec{\omega}\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}) = \vec{\omega}\Lambda(\omega\, r\, \overrightarrow{U_\theta}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_r} & \overrightarrow{U_\theta} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega\, r & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2\, r\overrightarrow{U_r}$

Donc $\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 r_0(1 + \sin\omega t)\overrightarrow{U_r}$

3- Accélération de Coriolis : (1pts)

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r} = 2\begin{vmatrix} \overrightarrow{U_r} & \overrightarrow{U_\theta} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega v_r\overrightarrow{U_\theta}$$

Donc $\overrightarrow{a_c} = 2\omega v_r\overrightarrow{U_\theta} = 2r_0\omega^2(\cos\omega t)\overrightarrow{U_\theta}$

4) En déduire sa vitesse et son accélération absolues :

La vitesse absolue (1pts)

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = r_0\omega[(\cos \omega t)\overrightarrow{U_r} + (1 + \sin \omega t)\overrightarrow{U_\theta}]$$

L'accélération absolue (1pts)

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e}$$

$$\overrightarrow{a_a} = -r_0\omega^2(\sin\omega t)\,\overrightarrow{U_r} - \omega^2 r_0(1 + \sin \omega t)\overrightarrow{U_r} + 2r_0\omega^2(\cos \omega t)\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_a} = -r_0\omega^2(1 + 2\sin \omega t)\overrightarrow{U_r} + 2r_0\omega^2(\cos \omega t)\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_a} = r_0\omega^2[-(1 + 2\sin \omega t)\overrightarrow{U_r} + (\cos \omega t)\overrightarrow{U_\theta}]$$

Exercice 3: (6pts)

Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes : $\begin{cases} x(t) = r_0\cos(\omega t) \\ y(t) = r_0\sin(\omega t) \end{cases}$

Avec r_0 et ω des constantes.

1. L'équation de la trajectoire :

$$\begin{cases} x(t) = r_0\cos(\omega t) \\ y(t) = r_0\sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = {r_0}^2\cos^2(\omega t) \\ y^2 = {r_0}^2\sin^2(\omega t) \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = {r_0}^2 \quad \text{(0.25pts)}$$

$x^2 + y^2 = {r_0}^2$ (0.5pts) c'est l'équation de la trajectoire d'un cercle de rayon r_0. (0.25pts)

2. Les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération :

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ $\begin{cases} \overrightarrow{v_x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -r_0\omega\sin(\omega t) \text{(0.5pts)} \\ \overrightarrow{v_y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = r_0\omega\cos(\omega t) \text{ (0.5pts)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{v} = r_0\omega((-\sin\omega t)\,\vec{\imath} + (\cos\omega t)\vec{\jmath}) \quad \text{(0.25pts)}$$

Le module de la vitesse : $\|\vec{v}\| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r_0\omega$=cst (0.25pts)

Le vecteur accélération $\vec{a}$ $\begin{cases} \overrightarrow{a_x}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -r_0\omega^2\cos(\omega t) \text{(0.5pts)} \\ \overrightarrow{a_y}(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -r_0\omega^2\sin(\omega t) \text{(0.5pts)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{a} = -r_0\omega^2((\cos\omega t)\,\vec{\imath} + (\sin\omega t)\vec{\jmath}) \quad \text{(0.25pts)}$$

Le module de la vitesse : $\|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r_0\omega^2$=cst (0.25pts)

3. La nature du mouvement :

a.v>0 le mouvement est un mouvement circulaire uniformément accéléré. (0.5pts)

4. Les accélérations tangentielle et normale :

$$\text{(0.25pts)} \quad a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{(0.5pts)}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} \; ou \; a_N = \sqrt{a^2 + a_T^2} = a = r_0\omega^2 \text{ (0.5pts)}$$

(0.25pts)

5. Le rayon de courbure R :

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{r_0^2\omega^2}{r_0\omega^2} = r_0 = R \qquad \text{(0.5pts)}$$