Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques
- 1ère Année LMD-MI –AU 2015/2016-

Examen de rattrapage –Analyse 1 –

Les livres et documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Chacune de vos réponses doit être justifiée et argumentée.

Exercice 1 (**I)** : 1pt + 1 pt ; **II)** : 2 Pts)

I) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 2x + 8 < 0$; **b)** $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12.$

II) Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Montrer que : $(|x-a| < |x-b|) \Leftrightarrow (x < \frac{a+b}{2})$

Exercice 2 (1 pt + 1 pt + 1 pt +1 Pt)

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ des nombres réels dont le terme général est défini par :

$$U_0 = 2 \text{ et pour tout } n \geq 0 \quad U_{n+1} = \sqrt{2U_n - 1}.$$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1$.

2) Etudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$.

3) La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ? Si oui calculer sa limite.

Exercice 2 (1,5 pts + 1,5 pts + 1 Pt)

Calculer les limites suivantes :

1) $lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x-2}{1-|x|}$; 2) $lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{4x}$; 3) $lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (x+1)$.

Exercice 3 (**I)** : 2 pts ; **II)** : 1 pt + 2 pts + 2 pts)

I) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$.

Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

II) Soit $g(x) = \frac{x+1+|x+5|}{2x+|3-x|}$. a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g.

b) Déterminer l'ensemble de continuité de la fonction g.

c) Peut-on prolonger g par continuité ?

NB : 1 point est attribué à une copie bien présentée.

LMD.MI - Analyse 1 - Corrigé succint - rattrapage Semestre 1 - 2015/2016

Exercice 1:

(I) (a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2-2x+8=(x-1)^2+7>0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x^2-2x+8<0\} = \phi$ (1 pt)

(b) On remarque que $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

Donc $\{x\in\mathbb{R} : |x^2-7x+12| > x^2-7x+12\} =]3,4[$ (1 pt)

(II) * Montrons d'abord $\left[x<\frac{a+b}{2}\right] \Rightarrow \left[|x-a|<|x-b|\right]$ $\left(\underset{a}{+} \overset{\frac{a+b}{2}}{+} \underset{b}{+} \right)$

Soit $x<\frac{a+b}{2}$. ($\Leftrightarrow 2x<a+b \Leftrightarrow x-a<b-x$)

1er cas : $a<x<\frac{a+b}{2}<b$

On a donc $|x-a|=x-a<b-x=|b-x|$. d'où l'implication

2e cas : $x\leq a<\frac{a+b}{2}<b$

On a $0\leq a-x<b-x \Rightarrow |a-x|<b-x$ d'où l'implication (1 pt)

* Inversement (montrons la contraposée, c'est à dire

$\left[x\geq\frac{a+b}{2}\right] \Rightarrow \left[|b-x|\leq|x-a|\right]$

Soit $x\geq\frac{a+b}{2}$ ($\Leftrightarrow 2x\geq a+b \Leftrightarrow x-a\geq b-x$

1er cas : $\frac{a+b}{2}\leq x<b$

$\Rightarrow 0\leq b-x\leq x-a \Rightarrow |b-x|\leq|x-a|$ d'où le résultat

2e cas : $a<\frac{a+b}{2}<b\leq x$ (

$\Rightarrow a+b\leq 2x \Rightarrow b-x\leq 0\leq x-a$

Par ailleurs

$a<b \Rightarrow -a>-b \Rightarrow x-a>-(b-x)$

Donc

$x-a=|x-a|\geq|b-x|$ d'où le resultat (1 pt)

(nous remarquons que $\left[|x-a|<|b-x|\right] \Rightarrow \left[x<\frac{a+b}{2}\right]$.

Exercice 2

$U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \sqrt{2U_n - 1}$

1/ $U_0 = 2 \geq 1$. On suppose que $U_n \geq 1$; or $U_{n+1} = \sqrt{2U_n - 1} \geq \sqrt{2.1-1} = 1$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \geq 1$. (On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \geq 1/2$. Donc $(U_n)_n$ est bien défini) $(1pt)$

2) Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2U_n - 1} - U_n = \frac{2U_n - 1 - U_n^2}{\sqrt{2U_n - 1} + U_n} = \frac{-(U_n - 1)^2}{\sqrt{2U_n - 1} + U_n} \leq 0$$

Donc (U_n) est décroissante $(1pt)$

3/ La suite $(U_n)_n$ est décroissante et minorée (par 1). Donc elle converge $(1pt)$
soit $l = \lim_n U_n$. Ainsi l vérifie $l = \sqrt{2l - 1} \Rightarrow l^2 = 2l - 1$.
$\Rightarrow (l-1)^2 = 0 \Rightarrow l = 1$ $(1pt)$ $\left(\lim_{n \to \infty} U_n = 1\right)$.

Exercice 3

1) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{1 - |x|} = -2$ $(1,5pt)$ $\left(\frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{1 - |x|} \text{ est défini en } 0\right)$

2) Posons $x_n = \frac{1}{8\pi n}$ et $y_n = \frac{1}{8\pi n + 4\pi}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

On remarque $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ et $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ et $\lim_{n \to \infty} \cos \frac{1}{4x_n} = 1$ et $\lim_{n \to \infty} \cos \frac{1}{4y_n} = -1$

Donc $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{4x}$ n'existe pas $(1,5pt)$

3/ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - (x+1) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + (x+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}\right]} = -\frac{1}{2}$ $(1pt)$

Exercice 4

(I) On suppose que $f(a) > 0$ (pour $f(a) < 0$ c'est le même raisonnement)
f continue en $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$
Posons $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$, or $-\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon \Rightarrow \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}$
$\Rightarrow |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$ $(f(x) \neq 0)$ $(2pts)$
(Pour $f(a) < 0$ on pose $\varepsilon = -\frac{f(a)}{2}$).

(2)/III

(II)

$$g(x) = \frac{x+1+|x+5|}{2x+|3-x|}$$

a) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2x + |3-x| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ 1pt

b) on remarque que : $|x+5| = \begin{cases} -x-5 & \text{si } x \in]-\infty,-5] \\ x+5 & \text{si } x \in]-5,+\infty \end{cases}$ et $|3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{si } x < 3 \\ x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Donc
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{x+3} & \text{si } x \in]-\infty,-5] \\ 2 & \text{si } x \in]-5,-3[\cup]-3,3[\\ \dfrac{2(x+3)}{3(x-1)} & \text{si } x \in [3,+\infty[\end{cases}$$

Continuité de g

* Sur $]-\infty,-5[$: $(x \mapsto \frac{-4}{x+3})$ est continue $\Rightarrow$ g st continue sur $]-\infty,-5[$
* Sur $]-5,-3[$: $(x \mapsto 2)$ st continue $\Rightarrow$ g st continue sur $]-5,-3[$
* en $x=-5$: $\lim_{x \to -5^-} g(x) = \lim_{x \to -5^-} \frac{-4}{x+3} = 2 = g(-5) = \lim_{x \to -5^+} g(x) = \lim_{x \to -5^+} 2 = 2$.

$\Rightarrow$ g st continue en $x=-5$.

* Sur $]-3,3[$: $(x \mapsto 2)$ st continue $\Rightarrow$ g st continue sur $]-3,3[$
* sur $]3,+\infty[$: $(x \mapsto \frac{2(x+3)}{3(x-1)})$ continue $\Rightarrow$ g st continue sur $]3,+\infty[$
* en $x=3$: $\lim_{x \to 3^-} g(x) = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2 = g(3) = \lim_{x \to 3^+} g(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2(x+3)}{3(x-1)} = 2$

donc g est continue en $x=3$

Ainsi g st continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. 2pts

c) $\lim_{x \to -3^-} g(x) = 2 = \lim_{x \to -3^+} g(x)$

on pose $\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \\ 2 & \text{si } x = -3 \end{cases}$

on peut donc prolonger g par $\tilde{g}$ continuité sur $\mathbb{R}$

(2pts)

(3)/III