Université Abou Bakr BELKAÏD
Faculté des Sciences
1ère année M.I

Année Universitaire 2015-2016

ALGEBRE 1
Examen de rattrapage + Corrigé
Durée 1h30'

Exercice 1 : (5 pts)

Soit E un ensemble non vide, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie dans $\mathcal{P}(E)$ telle que : $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), \quad Cl(A \cap B) = Cl(A) \cap Cl(B)$

On considère l'ensemble : $D = \{X \in \mathcal{P}(E), \exists Y \in \mathcal{P}(E), X \mathcal{R} Y \text{ et } Y \neq X\}$

Montrer que : $D = \mathcal{P}(E)$

Exercice 2 : (7 pts)

Soit E un ensemble non vide, muni d'une l.c.i $*$ associative, commutative et telle que : $\forall x \in E, \ x * x = x$

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie dans E par :

$$\forall x, y \in E, \quad x \mathcal{R} y \iff x * y = y$$

1°/ Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre

2°/ Soit $A = \{1, 2\}$, $E = \mathcal{P}(A)$ et "$*$" l'union d'ensembles (c.à.d : $X * Y = X \cup Y$)

a/ L'ordre $\mathcal{R}$ est-il total ? Justifier.

b/ Déterminer, s'ils existent, $\sup \mathcal{P}(A)$, $\inf \mathcal{P}(A)$, le plus grand élément et le plus petit élément de $\mathcal{P}(A)$.

Exercice 3 : (8 pts)

Dans l'ensemble $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on définit une l.c.i associative $*$ par : $\forall (a,b) \in G, \forall (c,d) \in G, \quad (a,b) * (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

1°/ Vérifier que $(1,0)$ est neutre pour $*$

2°/ Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif.

3°/ Soit $F = \{(a,b) \in G, \ a^2 + b^2 = 1\}$.

Montrer que $(F, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

ALGEBRE 1 Corrigé 2015. 2016

Examen de rattrapage

Exercice 1

$\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), \ Cl(A \cap B) = Cl(A) \cap Cl(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), \ Cl(A) \cap Cl(B) \neq \emptyset$ (car $\forall X, Cl(X) \neq \emptyset$ donc $Cl(A \cap B) \neq \emptyset$)

mais Rappel (cours) : Deux classes d'équivalence sont soit égales, soit disjointes, et donc :

$Cl(A) \cap Cl(B) \neq \emptyset \Rightarrow \forall A, B \in \mathcal{P}(E) : Cl(A) = Cl(B)$

$\underset{\text{cours}}{\Longleftrightarrow}$ " $A \mathcal{R} B$

D'un autre côté : E non vide $\Leftrightarrow \exists a \in E \Leftrightarrow \operatorname{Card} \mathcal{P}(E) \geq 2$

Alors : $\forall A \in \mathcal{P}(E), \exists B \in \mathcal{P}(E), A \neq B$

Ceci nous donne : $\forall A \in \mathcal{P}(E), \exists B \in \mathcal{P}(E), A \mathcal{R} B$ et $A \neq B$

Finalement : $\forall A \in \mathcal{P}(E), \ A \in D$ c.à.d $\mathcal{P}(E) \subset D$

et par déf : $D \subset \mathcal{P}(E)$.

Conclusion : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), Cl(A \cap B) = Cl(A) \cap Cl(B) \Rightarrow D = \mathcal{P}(E)$

Autre méthode pour montrer $\mathcal{P}(E) \subset D$ ($D \subset \mathcal{P}(E)$ par déf)

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Supposons par l'absurde que $X \notin D$

$X \notin D \Rightarrow \forall Y \in \mathcal{P}(E), X \not\mathcal{R} Y$ ou $X \neq Y$

N.B $\Rightarrow$ En particulier pour $Y \neq X$, on $X \not\mathcal{R} Y$ ou $Y = X$

$\Rightarrow (Y \neq X \text{ et } X \not\mathcal{R} Y)$ ou $(\underbrace{Y \neq X \text{ et } Y = X}_{\text{Faux}})$

$\Rightarrow Cl(X) \neq Cl(Y)$ (car cours $Cl(X) = Cl(Y) \Leftrightarrow X \mathcal{R} Y$)

$\Rightarrow Cl(X) \cap Cl(Y) = \emptyset$ (" " 2 classes soit égales soit disjointes)

$\overset{Hyp}{\Rightarrow} Cl(X \cap Y) = \emptyset$ impossible (car une classe n'est jamais vide)

Cl : $X \in \mathcal{P}(E) \Rightarrow X \in D$

N.B : Les cas "$Y \neq X$" sont possibles car $\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) \geq 2$

Exercice 2 : $\forall x,y \in E,\ x * y = y$

1°/ i) Réflexivité : Par hyp. $\forall x \in E,\ x * x = x$

Ceci veut dire : $\forall x \in E,\ x \mathcal{R} y$. cl : $\mathcal{R}$ est réflexive

ii) Antisymétrie : Soit $x, y \in E$ tq $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$.

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = y \\ \text{et} \\ y * x = x \end{cases} \xrightarrow[* \text{ commutative}]{} \begin{cases} x * y = y \\ x * y = x \end{cases} \Rightarrow x = y$$

cl : $\forall x, y \in E$, $(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$. cl : $\mathcal{R}$ est antisymétrique

iii) Transitivité : Soit $x, y, z \in E$ tq $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = y \\ y * z = z \end{cases} \Rightarrow x * z = x * (y * z) = (x * y) * z = y * z = z \Rightarrow x \mathcal{R} z$$

cl : $\mathcal{R}$ réf. antisy. et transitive, $\mathcal{R}$ est donc une relation d'ordre.

2°/ $A = \{1, 2\}$, $E = \mathcal{P}(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, A\}$ Rappel : $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

a) Soit $X = \{1\} \in \mathcal{P}(A)$, $Y = \{2\} \in \mathcal{P}(A)$.

$X \cup Y = Y \cup X = \{1, 2\}$ c.à.d $X \cup Y \neq Y$ et $Y \cup X \neq X$

Ceci veut dire : $\exists X \in \mathcal{P}(A), \exists Y \in \mathcal{P}(A)$, $X \not\mathcal{R} Y$ et $Y \not\mathcal{R} X$.

cl : $\mathcal{R}$ n'est pas un ordre total. car Rappel : $\mathcal{R}$ ordre total $\Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$ $X \mathcal{R} Y$ ou $Y \mathcal{R} X$

b/ $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, A\}$ Remarque : $X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \subset Y$

i) $\forall X \in \mathcal{P}(A)$, $X \cup A = A$ (car $X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subset A$)

Ce qui nous donne : $\forall X \in \mathcal{P}(A)$, $X \mathcal{R} A$.

Cela veut dire : A est un majorant de $\mathcal{P}(A)$.

D'un autre côté : $A \in \mathcal{P}(A)$

cl : A est un majorant de $\mathcal{P}(A)$ qui appartient à $\mathcal{P}(A)$

c'est exactement la déf. de plus grand élt de $\mathcal{P}(A)$

et Th : a plus grand élt de $B \Rightarrow a = \operatorname{Sup} B$

Alors : $\boxed{A = \text{plus grand élt de } \mathcal{P}(A) = \operatorname{Sup} \mathcal{P}(A)}$

ii) $\forall X \in \mathcal{P}(A)$, $\phi \cup X = X \Rightarrow \forall X \in \mathcal{P}(A)$, $\phi \mathcal{R} X$

$\Rightarrow \phi$ est un minorant de $\mathcal{P}(A)$

De plus, $\phi \in \mathcal{P}(A)$.

On a alors : ϕ est un minorant qui appartient à $\mathcal{P}(A)$

cl: $\boxed{\phi = \text{plus petit élt de } \mathcal{P}(A) = \text{Inf } \mathcal{P}(A)}$

car Th : b = plus petit élt de $B \Rightarrow b = \text{Inf } B$.

Exercice 3 : $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(a,b) * (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

1°/ Déf : $(1,0)$ est neutre pour $*$ $\Leftrightarrow \forall (a,b) \in G$, $(a,b)*(1,0) = (1,0)*(a,b) = (a,b)$

Soit $(a,b) \in G$:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)*(1,0) = (a.1 - b.0 \,,\, a.0 + b.1) = (a,b) \\ \text{et } (1,0)*(a,b) = (1.a - 0.b \,,\, 1b + 0a) = (a,b)\end{array}\right\} \Rightarrow (1,0) \text{ neutre pour } *$$

2°/ Déf : $(G,*)$ gr. commutatif $\Leftrightarrow \begin{cases} * \text{ l.c.i} \\ * \text{ associative} \\ * \text{ admet un élt neutre} \in G \\ \forall (a,b) \in G, (a,b) \text{ admet un symétrique } (a',b') \in G \\ * \text{ commutative} \end{cases}$

i) On a déjà : $*$ associative, $(1,0)$ neutre , $*$ l.c.i

ii) Soit $(a,b) \in G$ et $(c,d) \in G$.

$(a,b)*(c,d) = (ac-bd, ad+bc) = (ca-db, da+cb) = (c,d)*(a,b)$

$*$ est donc commutative

iii) Soit $(a,b) \in G$, Cherchons $(a',b') \in G$ tq $(a,b)*(a',b') = (a',b')*(a,b) = (1,0)$

On a déjà $*$ comm. cherchons donc (a',b') le symétrique à droite (par ex)

$(a,b)*(a',b') = (1,0) \Leftrightarrow (aa'-bb', ab'+a'b) = (1,0) \Leftrightarrow \begin{cases} aa'-bb' = 1 & (1) \\ ab'+a'b = 0 & (2) \end{cases}$

Rappel : $(a,b) \in G \Leftrightarrow (a,b) \neq (0,0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0)$.

Prenons $a \neq 0$, b quelconque (Même raisonnement si $b \neq 0$, a quelconque)

(2) $\Leftrightarrow b' = \dfrac{-a'b}{a}$

Alors :

$$\begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ b' = \dfrac{-a'b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aa' + \dfrac{a'b^2}{a} = 1 \\ b' = \dfrac{-a'b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'\left(a + \dfrac{b^2}{a}\right) = 1 \\ b' = \dfrac{-a'b}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' = \dfrac{a}{a^2+b^2} \\ b' = -\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \dfrac{a}{a^2+b^2} \\ b' = \dfrac{-b}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Rem i) $a^2+b^2 \neq 0$ car $a \neq 0$

ii) $a' \neq 0$ car $a \neq 0$

On a $(a',b') \in G$ car $a' \neq 0$. c.à.d $(a',b') \neq (0,0)$

Cl : $\forall (a,b) \in G$, $\exists (a',b') \in G$, $a' = \dfrac{a}{a^2+b^2}$, $b' = \dfrac{-b}{a^2+b^2}$ et $(a,b) * (a',b') = (1,0)$

Ceci veut dire : Tout élt (a,b) de G admet un symétrique $(a',b') \in G$

Conclusion : D'après tout ce qui précède, $(G, *)$ est un groupe commutatif

3°/ $F = \{(a,b) \in G, \ a^2+b^2 = 1\}$

Déf : F sous-groupe de G $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} i) F \neq \emptyset \\ ii) \forall (a,b), (c,d) \in F, \ (a,b) * (c',d') \in F \end{cases}$

i) $(1,0) \in F$ car $1^2 + 0^2 = 1$. donc $F \neq \emptyset$

ii) soit $(a,b), (c,d) \in F$.

$(a,b) \in F \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$ et $(c,d) \in F \Leftrightarrow c^2 + d^2 = 1$

$\Leftrightarrow (c',d') = (c, -d)$

Et

$(a,b) * (c',d') = (a,b) * (c,-d) = (ac + bd, -ad + bc)$

Vérifions que $(a,b) * (c',d') \in F$ c.à.d vérifions que $(\underbrace{ac+bd}_{X}, \underbrace{-ad+bc}_{Y}) \in F$

$$\begin{aligned} (ac+bd)^2 + (-ad+bc)^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd - 2abcd \\ &= a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2) \quad \text{avec } c^2+d^2 = 1 \\ &= a^2 + b^2 = 1 \end{aligned}$$

$X^2 + Y^2 = 1$ donc $(X,Y) \in F$ c.q.f.d

Cl : $(F, *)$ est un sous groupe de $(G, *)$