Université Abou-Bekr BELKAID
Faculté des Sciences

Année universitaire 2015-2016
Algèbre II. LMD MI.

Examen de Rattrapage
Durée 1h30'

Exercice 1 : Soit E un $I\!R - e.v.$ et f un endomorphisme non nul de E. Montrer que

$$f \circ f = 0 \Longrightarrow Kerf \text{ et } Imf \text{ ne sont pas supplémentaires}$$

Exercice 2 : Soit a un réel et $f_a : I\!R^3 \to I\!R^3$ une application linéaire de matrice

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & a & -2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ par rapport à la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $I\!R^3$.

1) Discuter, suivant les valeurs de a, le rang de M.
2) En déduire les valeur(s) de a pour lesquelle(s) les vecteurs $f_a(e_1), f_a(e_2)$ et $f_a(e_3)$ sont linéairement indépendants.

Exercice 3 : Soit α un réel fixé et f un endomorphisme de $I\!R^3$, de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -sin\alpha \\ -1 & 0 & cos\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$ par rapport à la base canonique B

1) Déterminer la matrice M associée à $g = f \circ f \circ f$ par rapport à B.
2) En déduire l'application g.
3) Déterminer $Kerg$ et sa dimension.
4) En déduire Img de deux manières différentes.

Exercice 4 : Soit $f : I\!R^3 \to I\!R^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$$

1) Déterminer la matrice A associée à f par rapport aux bases canoniques $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $B_2 = \{u_1, u_2\}$.
2) Soit $B_1' = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B_2' = \{b_1, b_2\}$ deux bases de $I\!R^3$ et $I\!R^2$ respectivement, telles que
$a_1 = e_1 + e_2 + 2e_3 \qquad a_2 = e_1 + e_3 \qquad a_3 = -e_1 - e_2 - 3e_3.$
$b_1 = u_1 + 3u_2 \qquad b_2 = 2u_1 + 5u_2$
a) Déterminer P la matrice de passage de B_1 à B_1', et Q la matrice de passage de B_2 à B_2'.
b) Ecrire u_1 et u_2 en fonction de b_1 et b_2. En déduire S la matrice de passage de B_2' à B_2.
c) Calculer Q^{-1}. Que remarque-t-on ? Justifier.
3) En déduire A' la matrice de f par rapport à B_1' et B_2'.
4) Déterminer, sans aucun calcul, les composantes des vecteurs $f(a_i)$, $i = 1, 2, 3$ dans la base B_2'.

Barème : Exercice 1 : 4 pts ; **Exercice 2 :** 4 pts ; **Exercice 3 :** 5 pts **Exercice 4 :** 7 pts

1ère année LMD. M.I — 2015-2016

Examen de Rattrapage — ALGEBRE 2

Corrigé

Exercice 1 : $f : E \to E$ endomorphisme non nul

$f\circ f = 0 \Rightarrow \forall x \in E, (f\circ f)(x) = 0 \Rightarrow \forall x\in E, f(f(x)) = 0 \Rightarrow \forall x \in E, f(x) \in \mathrm{Ker} f$

car : Rappel : $\mathrm{Ker} f \overset{\text{déf}}{=} \{x \in E, f(x) = 0\}$

D'un autre côté : $\mathrm{Im} f = \{y\in E, \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x), x\in E\}$

On a alors : $\forall x \in E, f(x) \in \mathrm{Im} f$.

Finalement : $\forall x\in E, f(x) \in (\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f)$

Par hypothèse f est un endomorphisme non nul donc $\exists x_0 \in E, f(x_0) \neq 0$

et comme $\forall x \in E\ f(x) \in (\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f)$, on a $f(x_0) \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$

On peut en déduire alors : $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f \neq \{0_E\}$

Rappel : Kerf et Imf supplémentaires $\overset{\text{déf}}{\iff} \begin{cases} \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E \\ \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0_E\} \end{cases}$

Donc :

$\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f \neq \{0_E\} \Rightarrow$ Kerf et Imf ne sont pas supplémentaires

Cl : $f\circ f = 0 \Rightarrow$ Kerf et Imf ne sont pas supplémentaires.

Exercice 2 :

1) Déf : rgM = plus grand nombre de vecteurs (colonnes) linᵗ indépendants

$$\mathrm{rg} M = \mathrm{rg}\begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & a & -2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{rg} \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v' & w' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & a+2 & 0 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \end{array}$$ avec $u' = v - u$, $w' = w - u$

i) Si $a-1 \neq 0$ alors $w' \neq 0$ et si de plus $a+2\neq 0$ alors $\mathrm{rg} M = 3$

donc : Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ alors $\mathrm{rg} M = 3$

ii) Si $a = 1$ alors $w' = 0$ et $\mathrm{rg} M = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$

iii) Si $a = -2$ alors $\mathrm{rg} M = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$ car u' et w' liés

2/ M est la matrice de f / à B $\Rightarrow$ les vect. colonnes de M sont les vect. $f(e_i)$ $i = 1,2,3$

$\{f(e_i), i = 1,2,3\}$ libre $\iff \mathrm{rg} M = 3 \iff a \neq 1$ et $a \neq -2$.

Exercice 3 : $A = M_f$ matrice associée à f

1°/ $M = M_g = M_{f\circ f\circ f} = M_f \cdot M_f \cdot M_f = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\alpha \\ -1 & 1 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\alpha \\ -1 & 1 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\alpha \\ -1 & 1 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$

voir épreuve finale

$= \begin{pmatrix} -1+\sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & -1+\cos^2\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\alpha \\ -1 & 1 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2°/ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donc $\underbrace{\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3}_{g = f\circ f\circ f}$

$\forall X \in \mathbb{R}^3 \quad g(X) = M.X$ donc si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

cl. L'app g est définie par : $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \longmapsto g(x,y,z) = (0,0,0)$
(app. constante nulle)

3°/ $\ker g = \{X \in \mathbb{R}^3, g(X) = 0\}$ et $\forall X \in \mathbb{R}^3, g(X) = 0$ donc $\ker g = \mathbb{R}^3$.
et on sait $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ (car $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$)

4°/ i) $\operatorname{Im} g = \{y \in \mathbb{R}^3, \exists x \in \mathbb{R}^3, y = g(x)\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ car $\forall x \in \mathbb{R}^3, g(x) = 0$

ii) Th du rg : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker g + \dim \operatorname{Im} g$
c.a.d $3 = 3 + \dim \operatorname{Im} g$ donc $\dim \operatorname{Im} g = 0$

On a : $\operatorname{Im} g \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim \operatorname{Im} g = 0$ Donc $\operatorname{Im} g = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Exercice 4 : $f(x,y,z) = (3x + 2y - 4z \ , \ x - 5y + 3z)$

1°/ $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}$

$f(e_1) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (3, 1)$
$f(e_2) = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = (2, -5)$
$f(e_3) = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 = (-4, 3)$

donc $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

2°/a) Pour déterminer la matrice P de passage de la base B_1 à la base B_1' il suffit d'exprimer les vecteurs a_1, a_2, a_3 de la base B_1' en fonction des vecteurs e_1, e_2, e_3 de la base B_1 c.à.d

$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$

Exercice 4 (Suite)

2°) Même chose : Exprimons les vecteurs b_1, b_2 de la base B'_2 en fonction des vecteurs u_1, u_2 de la base B_2 c.à.d

$$Q = \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}$$

b/ u_1 et u_2 ? en fonction de b_1 et b_2

i) $\begin{cases} b_1 = u_1 + 3u_2 \\ b_2 = 2u_1 + 5u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = b_1 - 3u_2 \\ b_2 = 2b_1 - 6u_2 + 5u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = b_1 - 3u_2 \\ u_2 = 2b_1 - b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5b_1 + 3b_2 \\ u_2 = 2b_1 - b_2 \end{cases}$

ii) Pour déterminer S la matrice de passage de la base B'_2 à B_2 , exprimons les vect. u_1, u_2 en fonction des vect. b_1, b_2 de B'_2

donc $S = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array}$ (d'aprés la question précédente)

c) Calculons Q^{-1}. $\quad Q^{-1} = \dfrac{1}{\det Q} \, {}^t co(Q)$

$\det Q = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \quad ; \quad co\, Q = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & +1 \end{pmatrix} \quad ; \quad {}^t co\, Q = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & +1 \end{pmatrix}$

Donc $Q^{-1} = -\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Remarque $Q^{-1} = S$: Normal : car si Q est la matrice de passage de la base B_2 à la base B'_2 alors Q^{-1} est la matrice de passage de B'_2 à B_2 c.à.d S.

3°/ On a

$$\underset{B'_1}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow[P]{Id_{\mathbb{R}^3}} \underset{B_1}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow[A]{f} \underset{B_2}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow[Q^{-1}]{Id_{\mathbb{R}^2}} \underset{B'_2}{\mathbb{R}^2}$$

$$Id_{\mathbb{R}^2} \circ \underset{A'}{f} \circ Id_{\mathbb{R}^3} = f$$

$$A' = M_{Id_{\mathbb{R}^2} \circ f \circ Id_{\mathbb{R}^3}} = M_{Id_{\mathbb{R}^2}} \cdot A \cdot M_{Id_{\mathbb{R}^3}} = Q^{-1} A P$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -20 & 26 \\ 8 & 11 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 13 & 35 \\ -19 & -7 & 26 \end{pmatrix}$$

4°/ A' est la matrice de f / à $B'_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B'_2 = \{b_1, b_2\}$ donc les vect. colonnes de A' sont les vect. $f(a_i)$ $i = 1, 2, 3$ en fonct. de b_1, b_2

Alors : $f(a_1) = \begin{pmatrix} 19 \\ -19 \end{pmatrix}$, $f(a_2) = \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \end{pmatrix}$, $f(a_3) = \begin{pmatrix} 35 \\ 26 \end{pmatrix}$