Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques
- 1ère Année LMD-MI –AU 2015/2016-

Epreuve de rattrapage –Analyse 2 – (Durée 1 h 30mn)

Les livres et documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Chacune de vos réponses doit être justifiée et argumentée.

Exercice 1 (5 pts)

Soit f une fonction $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en 0 , $f'(0) = 0$ et $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$.

1) Montrer que $f(0) = 0$. **(1,5 pt)**

2) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x$. **(2 pts)**

3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. **(1,5 pts)**

Exercice 2 (6 pts)

Trouver le développement limité au voisinage de x_0 , à l'ordre n de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = e^x + cos3x - \frac{1}{2} sinx$; $x_0 = 0$ et $n = 5.$ **(2 pts)**

2) $g(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$; $x_0 = 1$ et $n = 2.$ **(2 pts)**

3) $h(x) = \frac{sin\frac{1}{x}}{1+x}$; $x_0 = +\infty$ et $n = 4.$ **(2 pts)**

Exercice 3 (6 pts)

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int \frac{4x^2}{x^4-1} dx$ **(2 pts)** ; b) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$ **(2 pts)** ; c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$ **(2 pts)**

Exercice 4 (2 pts)

Résoudre l'équation différentielle $y' + y = x$

NB : 1 point est attribué à une copie bien présentée

Développements limités

Développements limités, façon Taylor-Young, au voisinage de 0 (à connaître par cœur) :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)...(a-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

Développements limités qu'on calcule aisément à partir des précédents :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + \cdots + \frac{1.3.5....(2n-1)x^{2n+1}}{2.4.6....(2n)(2n+1)} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{argsh}(x) = x - \frac{1.x^3}{2.3} + \cdots + (-1)^n \frac{1.3.5....(2n-1)x^{2n+1}}{2.4.6....(2n)(2n+1)} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

En physique, on utilise fréquemment des développements limités d'ordre 1 :

$$(1+x)^n = 1 + nx + x\varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x\varepsilon(x)$$

$$\sin x = x + x^2\varepsilon(x)$$

$$\tan x = x + x^2\varepsilon(x)$$

- Corrigé succinct - Épreuve de rattrapage -

Analyse 2 - LMD. M.I - 2015/2016 -

Exercice 1 : (5 pts)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable en 0, $f'(0) = 0$ et $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$.

(1) pour $x = 0$ et $y = 0$, nous avons $f(0+0) = f(0) + f(0) + 0.0$ (1 pt)

$\Longrightarrow f(0) = 0$ (0,5 pt)

(2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$: $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{f(x_0) + f(h) + x_0 h - f(x_0)}{h}$ (0,5 pt)

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h} + x_0 = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h - 0} + x_0$

or f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ d'où $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h - 0} = f'(0) = 0$ (0,5 pt)

et $f'(x_0) = x_0$.

d'où f est dérivable en x_0 et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = x$ (1 pt)

Par conséquent f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et (1 pt)

(3) $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C^{te}$

or $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 + C^{te} \Rightarrow C^{te} = 0$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ (0,5 pt)

Exercice 2

(1) Développons $f(x) = e^x + \cos 3x - \frac{1}{2}\sin x$ au point $x_0 = 0$ à l'ordre $n = 5$

on a : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + x^5 o(1)$

$\cos 3x = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{81}{24}x^4 + x^5 o(1)$ (0,5 + 0,5 + 0,5) pts

$\frac{1}{2}\sin x = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{240} + x^5 o(1)$

$\Longrightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{2}x - 4x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{41}{12}x^4 + \frac{x^5}{240} + x^5 o(1)$ (0,5 pt)

② Développer $g(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$ au point $x_0 = 1$ et à l'ordre $n = 2$ II/3

$e^x = e^{x-1+1} = e\, e^{x-1} \Rightarrow e^{1+u} = e\left[1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2 o(1)\right]$ en posant $u = x-1$ d'où
et $e^x = e\left[1+(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+(x-1)^2 o(1)\right]$ $o(1) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ 0,5 pt

or $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{1+(x-1)+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{u}{2}}}$ $(u = x-1)$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{u}{2}\right]^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}\frac{u^2}{4} + u^2 o(1)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\underbrace{u}_{(x-1)} + \frac{3}{32}\underbrace{u^2}_{(x-1)^2} + \underbrace{u^2}_{(x-1)^2} o(1)\right)$$ 0,5 pt

Ainsi (toujours pour $u = (x-1)$ et $o(1) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$)

$$g(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = \frac{e\sqrt{2}}{2}\left(1+u+\frac{u^2}{2}+u^2 o(1)\right)\left(1-\frac{1}{4}u+\frac{3}{32}u^2+u^2 o(1)\right)$$

$$g(x) = e\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}(x-1)+\frac{11}{64}(x-1)^2\right)+(x-1)^2 o(1)$$ $\left(o(1) \xrightarrow[x\to 1]{} 0\right)$

1 pt

③ Développer $h(x) = \frac{\sin 1/x}{1+x}$ au voisinage de $x_0 = +\infty$ à l'ordre 4

$h(x) = \frac{\sin 1/x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$; Posons $\frac{1}{x} = V$ 0,5 pt

d'où

$h(x) = \frac{V \sin V}{1+V}$; or $V\sin V = V^2 - \frac{V^4}{6} + V^4 o(1)$ $\left(o(1) \xrightarrow[V\to 0]{} 0\right)$ 0,5 pt

et $\frac{1}{1+V} = 1 - V + V^2 - V^3 + V^4 + V^4 o(1)$

Ainsi

$h(x) = \left(V^2 - \frac{V^4}{6} + V^4 o(1)\right)\left(1 - V + V^2 - V^3 + V^4 + V^4 o(1)\right) = V^2 - V^3 + \frac{5}{6}V^4 + V^4 o(1)$

$\Rightarrow h(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \left(\frac{1}{x}\right)^4 o(1)$ $\left(o(1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\right)$ 1 pt exercice 3 (6 pts)

(a) On a $\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{4x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ (0,5 pt)

on a bien $A = 1$; $B = -1$, $C = 0$ et $D = 2$ (0,5 pt)

$\Rightarrow \int \frac{4x^2}{x^4-1}dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1}\right)dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2\,\mathrm{Arctg}\,x + C^{te}$ (1 pt)

(b) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^x}$; on remarque que si $h(x) = 1+e^x \Rightarrow h'(x) = e^x dx$

d'où $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^x} = \left[\ln|1+e^x|\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ (2 pts)

(c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$; posons $\sqrt{x} = w$; d'où $x = w^2$ et $dx = 2w\,dw$ (0,5 pt)

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1} = \int_0^1 \frac{2w^2}{1+w^2}dw = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+w^2}\right)dw$ (0,5 pt)

$= 2\left[w - \mathrm{Arctg}\,w\right]_0^1 = 2 - \pi/2$ (1 pt)

Exercice 4 (2 pts)

$y' + y = x$ (E) et $y' + y = 0$ (E₀)

on remarque $y = Ke^{-x}$, $K \in \mathbb{R}$ est la solution generale de (E₀) (1 pt)

cherchons une solution y_p particuliere de (E) sous forme $y_p = K(x)e^{-x}$

$y_p' - y_p = K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = K'(x)e^{-x} = x \Rightarrow K'(x) = xe^{+x} \Rightarrow K(x) = +(x-1)e^{x}$

d'où $y_p = +(x-1)$ (0,5 pt)

Ainsi $y = Ke^{-x} + (x-1)$, $K \in \mathbb{R}$, est la solution generale de (E)

(0,5 pt)

III/3